

PRINCIPES
MATHÉMATIQUES
DE LA
PHILOSOPHIE NATURELLE.



Isaac NEWTON
1642-1727

Isaac NEWTON

PRINCIPES
MATHÉMATIQUES
DE LA
PHILOSOPHIE NATURELLE

TOME I



ÉDITIONS
JACQUES GABAY

© 1990, Éditions Jacques Gabay
25, rue du D^r Roux 92330 Sceaux

Tous droits réservés. Aucun extrait de ce livre ne peut-être reproduit, sous quelque forme ou quelque procédé que ce soit, sans le consentement préalable de l'Éditeur.

ISBN 2-87647-070-5

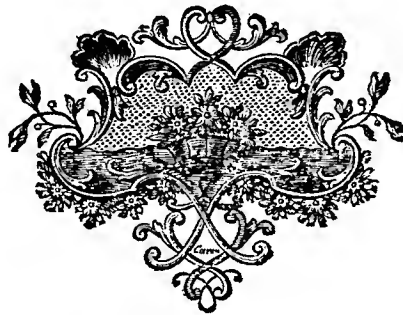
PRINCIPES MATHÉMATIQUES

DE LA

PHILOSOPHIE NATURELLE,

Par feu Madame la Marquise DU CHASTELLET.

TOME PREMIER.

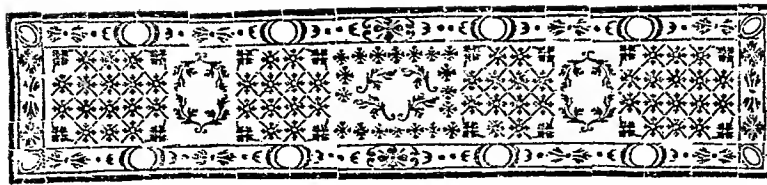


A PARIS,

Chez { DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais,
LAMBERT, Imprimeur - Libraire, rue & à côté
de la Comédie Françoisse, au Parnasse.

M. D. C C L I X.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÈGE DU ROI.



AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR.

CET Ouvrage est composé de deux Parties. La première est une traduction du texte littéral des *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*. Il est presque superflu d'avertir qu'elle a été faite sur la dernière édition de 1726, édition qui l'emporte sur toutes les précédentes par rapport aux corrections suggerées par des idées postérieures, & par les remarques de quelques célèbres Mathématiciens. L'illustre Interprète, plus jaloux de saisir l'esprit de l'Auteur, que ses paroles, n'a pas craint en quelques endroits d'ajouter ou de transposer quelques idées pour donner au sens plus de clarté. En conséquence on trouvera souvent *Newton* plus intelligible dans cette traduction que dans l'original; & même que dans la traduction Angloise. En effet on s'est tellement attaché dans cette dernière au texte littéral de l'Auteur, que s'il y a quelque ambiguïté dans le Latin, on la retrouve dans l'Anglois. Tant de timidité donneroit lieu de soupçonner l'Auteur d'avoir foiblement entendu son original, & d'avoir usé de la ressource ordinaire en pareil cas: c'est de rendre les mots quand on ne peut rendre les choses. Nous

ij A V E R T I S S E M E N T.

aimons pourtant mieux penser que cette scrupuleuse fidélité vient d'un autre motif, & l'attribuer à un certain respect si justement acquis à cet immortel Ouvrage, respect qui a engagé son Traducteur à le rendre trait pour trait.

A l'égard de la confiance que le Public doit avoir dans cette traduction, il suffit de dire qu'elle a été faite par feu Madame la Marquise *du Châtelet*, & qu'elle a été revûe par M. *Clairault*.

La seconde partie de l'Ouvrage est un Commentaire des endroits des principes, relatifs au système du monde. Ce Commentaire est lui-même divisé en deux parties, dans la première desquelles on expose de la manière la plus sensible, les principaux phénomènes dépendans de l'attraction : ces découvertes jusqu'à présent hérissées de tant d'épines, seront désormais accessibles à tous les Lecteurs capables de quelque attention, & qui auront de légères notions des Mathématiques.

A cette partie du Commentaire en succède une plus sçavante. On y donne par analyse la solution des plus beaux problèmes du système du monde : on y examine la forme qu'ont réellement ou qu'auroient les orbites des planètes dans les différentes hypothèses de pesanteur, l'attraction qu'exerceroient des corps de différentes figures, la réfraction de la lumière, effet de l'attraction des parties insensibles des corps, la théorie de la figure de la terre & celle des marées. Toutes ces recherches sont tirées pour la plupart ou des Ouvrages de M. *Clairault*, ou des cahiers qu'il donnoit en forme de leçons à M. le Comte *du*

A V E R T I S S E M E N T. ijj

Châtelet Lomont, fils de l'illustre Marquise. L'avant dernière section est un excellent précis de son *Traité sur la figure de la terre*. La dissertation du Sçavant *M. Daniel Bernoulli*, qui a remporté le prix proposé pour la question des marées forme le fond de la dernière : elle est de plus augmentée de diverses notes & éclaircissémens que l'Auteur a communiqués.

On s'étonnera sans doute que ce Commentaire ne s'étende pas plus loin ; mais je l'ai déjà dit , son Auteur a cru devoir se borner à ce qui concerne plus particulièrement le système du monde. Dans cette vûe , il n'a pas jugé nécessaire de commenter la partie des Principes qui contient la théorie des fluides. D'ailleurs cette théorie a été traitée par tant de mains , & en particulier avec tant de succès par MM. *Daniel Bernoulli* & *d'Alembert* , dont les écrits sont entre les mains de tout le monde , qu'il devenoit superflu d'y toucher. A l'égard de la théorie des Comètes , on trouve dans la première partie du Commentaire un article entier qui les concerne & qui doit suffire. La détermination géométrique de la forme de leurs orbites est contenue dans le problème général des trajectoires , & c'est dans les traités d'Astronomie qu'on doit chercher la manière d'en déterminer la forme & la position d'après les observations. *M. le Monnier* a suffisamment rempli cet objet dans ses élémens d'Astronomie , & ceux qui ne trouveroient pas une clarté suffisante dans le texte même du troisième livre des Principes de *M. Newton* , peuvent recourir à ces élémens comme à un excellent Commentaire.

Il n'y a que la théorie des planètes secondaires dont

iv A V E R T I S S E M E N T.

le manque dans cet Ouvrage sembleroit plus difficile à justifier ; mais au tems où *M. Clairault* travailloit avec *Madame du Châtelet* , il étoit encore trop peu content , & de ce que *Newton* avoit fait sur ce sujet , & de ses idées propres , pour lui en rien communiquer. Cette partie intéressante du systême du Monde n'a reçu que depuis peu cette perfection qui lui manquoit. Pour suppléer à ce défaut , on doit consulter la pièce de *M. Clairault* qui a remporté le prix de l'Académie de Petersbourg sur la *théorie de la Lune* , & la premiere partie de l'Ouvrage que *M. d'Alembert* vient de publier sous le titre de *Recherches sur quelques points importans du systême du Monde*.

C'est-là tout ce qu'en qualité d'Editeurs nous avons à dire de cet Ouvrage. *M. de Voltaire* a pris la peine de tracer le caractère de la sçavante Dame qui en est l'Auteur. La Préface Historique qu'on lit à la suite de cet Avertissement est de cet homme célèbre.





PRÉFACE HISTORIQUE.

CETTE traduction que les plus sçavans Hommes de France devoient faire, & que les autres doivent étudier, une femme l'a entreprise & achevée à l'étonnement & à la gloire de son pays. Gabrielle-Emilie de Breteuil, Marquise du Châtelet, est l'Auteur de cette Traduction, devenue nécessaire à tous ceux qui voudront acquérir ces profondes connoissances, dont le monde est redevable au grand Newton.

C'eût été beaucoup pour une femme de sçavoir la Géométrie ordinaire, qui n'est pas même une introduction aux vérités sublimes contenues dans cet Ouvrage immortel. On sent assez qu'il falloit que Madame la Marquise du Châtelet fût entrée bien avant dans la carrière que Newton avoit ouverte, & qu'elle possédât ce que ce grand homme avoit enseigné. On a vu deux prodiges : l'un, que Newton ait fait cet Ouvrage ; l'autre, qu'une Dame l'ait traduit & l'ait éclairci.

Ce n'étoit pas son coup d'essai, elle avoit auparavant donné au Public une explication de la Philosophie de Leibnitz sous le titre d'Institutions de Physique, adressées à son fils, auquel elle avoit enseigné elle-même la Géométrie.

Le Discours préliminaire qui est à la tête de ses Institutions est un chef d'œuvre de raison & d'élo-

quence : elle a répandu dans le reste du Livre une méthode & une clarté que Léibnitz n'eut jamais ; & dont ses idées ont besoin , soit qu'on veuille seulement les entendre, soit qu'on veuille les réfuter.

Après avoir rendu les imaginations de Léibnitz intelligibles , son esprit qui avoit acquis encore de la force & de la maturité par ce travail même , comprit que cette Métaphysique si hardie , mais si peu fondée , ne méritoit pas ses recherches. Son ame étoit faite pour le sublime , mais pour le vrai. Elle sentit que les monades & l'harmonie préétablies devoient être mises avec les trois élémens de Descartes , & que des systêmes qui n'étoient qu'ingénieux , n'étoient pas dignes de l'occuper. Ainsi, après avoir eu le courage d'embellir Léibnitz, elle eut celui de l'abandonner : courage bien rare dans quiconque a embrassé une opinion , mais qui ne coûta guères d'efforts à une ame qui étoit passionnée pour la vérité.

Défaite de tout esprit de systême , elle prit pour sa règle celle de la Société Royale de Londres , *Nullius in verba* ; & c'est parce que la bonté de son esprit l'avoit rendue ennemie des partis & des systêmes , qu'elle se donna toute entière à Newton. En effet Newton ne fit jamais de systême , ne supposa jamais rien , n'enseigna aucune vérité qui ne fût fondée sur la plus sublime Géométrie ou sur des expériences incontestables. Les conjectures qu'il a hasardées à la fin de son Livre sous le nom de Recherches , ne sont que des doutes , il ne les donne que pour tels ; & il seroit presque impossible que celui qui n'avoit jamais affirmé que des vérités évidentes , n'eût pas douté de tout le reste.

Tout ce qui est donné ici pour principe, est en effet digne de ce nom, ce sont les premiers ressorts de la nature, inconnus avant lui : & il n'est plus permis de prétendre à être Physicien sans les connoître.

Il faut donc bien se garder d'envisager ce Livre comme un système, c'est-à-dire comme un amas de probabilités qui peuvent servir à expliquer bien ou mal quelques effets de la Nature.

S'il y avoit encore quelqu'un d'assez absurde pour soutenir la matière subtile & la matière cannellée, pour dire que la terre est un soleil encrouté, que la lune a été entraînée dans le tourbillon de la terre, que la matière subtile fait la pesanteur, & toutes ces autres opinions romanesques substituées à l'ignorance des Anciens, on diroit : Cet homme est Cartésien. S'il croyoit aux monades, on diroit : Il est Leibnitien ; mais on ne dira pas de celui qui sçait les élémens d'Euclide, Qu'il est Euclidien : ni de celui qui sçait d'après Galilée en quelle proportion les corps tombent, Qu'il est Galiléiste. Aussi en Angleterre ceux qui ont appris le calcul infinitésimal, qui ont fait les expériences de la lumière, qui ont appris les loix de la gravitation, ne sont point appelés Newtoniens : c'est le privilège de l'erreur de donner son nom à une Secte.

Si Platon avoit trouvé des vérités, il n'y eût point eu de Platoniciens, & tous les hommes auroient appris peu à peu ce que Platon avoit enseigné ; mais parce que dans l'ignorance qui couvre la terre, les uns s'attachoient à une erreur, les autres à une autre, on combattoit sous différents étendards : il y avoit

des Péripatéticiens, des Platoniciens, des Épicuriens, des Zénonistes, en attendant qu'il y eût des Sages.

Si on appelle encore en France Newtoniens les Philosophes qui ont joint leurs connoissances à celles dont Newton a gratifié le genre humain, ce n'est que par un reste d'ignorance & de préjugé. Ceux qui sçavent peu & ceux qui sçavent mal, ce qui compose une multitude prodigieuse, s'imaginèrent que Newton n'avoit fait autre chose que combattre Descartes, à peu près comme avoit fait Gassendi : ils entendirent parler de ses découvertes, & ils les prirent pour un système nouveau. C'est ainsi que quand Harvée eut rendu palpable la circulation du sang, on s'éleva en France contre lui : on appella Harvéistes & Circulateurs ceux qui osoient embrasser la vérité nouvelle que le Public ne prenoit que pour une opinion. Il le faut avouer, toutes les découvertes nous sont venues d'ailleurs, & toutes ont été combattues. Il n'y a pas jusqu'aux expériences que Newton avoit faites sur la lumière, qui n'ayent essuyé parmi nous de violentes contradictions. Il n'est pas surprenant après cela que la gravitation universelle de la matière ayant été démontrée, ait été aussi combattue.

Il a fallu, pour établir en France toutes les sublimes vérités que nous devons à Newton, laisser passer la génération de ceux qui ayant vieilli dans les erreurs de Descartes, *turpè putaverunt parere minoribus, & quæ imberbes didicere, senes perdenda fateri.*

Madame du Châtelet a rendu un double service à la postérité en traduisant le Livre des Principes, & en l'enrichissant d'un Commentaire. Il est vrai que

que la Langue Latine dans laquelle il est écrit, est entendue de tous les sçavans ; mais il en coute toujours quelques fatigues à lire des choses abstraites dans une Langue étrangere : d'ailleurs le Latin n'a pas de termes pour exprimer les vérités mathématiques & Physiques qui manquoient aux anciens.

Il a fallu que les modernes créassent des mots nouveaux pour rendre ces nouvelles idées. C'est un grand inconvénient dans les Livres de sciences, & il faut avouer que ce n'est plus gueres la peine d'écrire ces Livres dans une Langue morte, à laquelle il faut toujours ajouter des expressions inconnues à l'antiquité, & qui peuvent causer de l'embarras. Le Français qui est la Langue courante de l'Europe, & qui s'est enrichi de toutes ces expressions nouvelles & nécessaires, est beaucoup plus propre que le Latin à répandre dans le monde toutes ces connoissances nouvelles.

A l'égard du Commentaire Algébrique, c'est un Ouvrage au dessus de la traduction. Madame du Châtelet y travailla sur les idées de M. Clairaut : elle fit tous les calculs elle-même, & quand elle avoit achevé un Chapitre, M. Clairaut l'examinait & le corrigeoit. Ce n'est pas tout, il peut dans un-travail si pénible échaper quelque méprise ; il est très-aisé de substituer en écrivant un signe à un autre ; M. Clairaut faisoit encore revoir par un tiers les calculs, quand ils étoient mis au net, de sorte qu'il est moralement impossible qu'il se soit glissé dans cet Ouvrage une erreur d'inattention ; & ce qui le feroit du moins autant, c'est qu'un Ouvrage où M. Clai-

raut a mis la main , ne fût pas excellent en son genre.

Autant qu'on doit s'étonner qu'une femme ait été capable d'une entreprise qui demandoit de si grandes lumieres & un travail si obstiné , autant doit-on déplorer sa perte prématurée. Elle n'avoit pas encore entierement terminé le Commentaire , lorsqu'elle prévît que la mort pouvoit l'enlever ; elle étoit jalouse de sa gloire & n'avoit point cet orgueil de la fausse modestie , qui consiste à paroître mépriser ce qu'on souhaite , & à vouloir paroître supérieure à cette gloire véritable , la seule récompense de ceux qui servent le Public , la seule digne des grandes ames , qu'il est beau de rechercher , & qu'on n'affecte de dédaigner que quand on est incapable d'y atteindre.

Elle joignit à ce goût pour la gloire , une simplicité qui ne l'accompagne pas toujours , mais qui est souvent le fruit des études sérieuses. Jamais femme ne fut si savante qu'elle , & jamais personne ne mérita moins qu'on dît d'elle , C'est une femme savante : elle ne parloit jamais de science qu'à ceux avec qui elle croyoit pouvoir s'instruire , & jamais n'en parla pour se faire remarquer. On ne la vit point rassembler de ces Cercles où il se fait une guerre d'esprit , où l'on établit une espèce de tribunal , où l'on juge son siecle , par lequel , en récompense , on est jugé très-séverement. Elle a vécu longtems dans des sociétés où l'on ignoroit ce qu'elle étoit , & elle ne prenoit pas garde à cette ignorance.

Née avec une éloquence singuliere , cette élo-

quence ne se déployoit que quand elle avoit des objets dignes d'elle. Ces Lettres où il ne s'agit que de montrer de l'esprit, les petites finesses, ces tours délicats que l'on donne à des choses ordinaires, n'entroient point dans l'immensité de ses talents; le mot propre, la précision, la justesse & la force étoient le caractère de son éloquence; elle eût plutôt écrit comme Pascal & Nicole, que comme Madame de Sevigné. Mais cette fermeté sévère & cette trempe vigoureuse de son esprit ne le rendoient pas inaccessible aux beautés de sentiments: les charmes de la Poësie & de l'Eloquence la pénétoient, & jamais oreille ne fut plus sensible à l'harmonie. Elle savoit par cœur les meilleurs vers, & ne pouvoit souffrir les médiocres. C'étoit un avantage qu'elle eût sur Newton, d'unir à la profondeur de la Philosophie, le goût le plus vif & le plus délicat pour les Belles Lettres.

On ne peut que plaindre un Philosophe réduit à la sécheresse des vérités, & pour qui les beautés de l'imagination & du sentiment sont perdues.

Dès sa tendre jeunesse elle avoit nourri son esprit de la lecture des bons Auteurs, en plus d'une Langue; elle avoit commencé une traduction de l'Enéide dont j'ai vû plusieurs morceaux remplis de l'ame de son Auteur: elle apprit depuis l'Italien & l'Anglais. Le Tasse & Milton lui étoient aussi familiers que Virgile: elle fit moins de progrès dans l'Espagnol, parce qu'on lui dit qu'il n'y a gueres, dans cette Langue, qu'un Livre célèbre, & que ce Livre est frivole.

L'étude de sa Langue fut une de ses principales occupations : il y a d'elle des remarques manuscrites , dans lesquelles on découvre , au milieu de l'incertitude de la Grammaire , cet esprit philosophique qui doit dominer par tout , & qui est le fil de tous les labyrinthes.

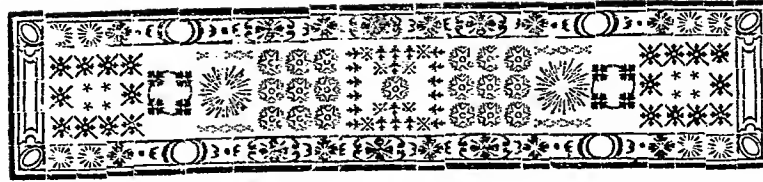
Parmi tant de travaux que le savant le plus laborieux eût à peine entrepris , qui croiroit qu'elle trouvât du tems , non seulement pour remplir tous les devoirs de la société , mais pour en rechercher avec avidité tous les amusemens ? Elle se livroit au plus grand monde comme à l'étude : tout ce qui occupe la société étoit de son ressort , hors la médifance. Jamais on ne l'entendit relever un ridicule , elle n'avoit ni le tems , ni la volonté de s'en appercevoir ; & quand on lui disoit que quelques personnes ne lui avoient pas rendu justice , elle répondoit qu'elle vouloit l'ignorer. On lui montra un jour je ne fais quelle misérable brochure dans laquelle un auteur , qui n'étoit pas à portée de la connoître , avoit osé mal parler d'elle. Elle dit que si l'auteur avoit perdu son tems à écrire ces inutilités , elle ne vouloit pas perdre le sien à les lire , & le lendemain ayant sçu qu'on avoit renfermé l'auteur de ce libelle , elle écrivit en sa faveur , sans qu'il l'ait jamais sçu.

Elle fut regrettée à la Cour de France , autant qu'on peut l'être dans un pays où les intérêts personnels font si aisément oublier tout le reste. Sa mémoire a été précieuse à tous ceux qui l'ont connue particulièrement , & qui ont été à portée de voir l'étendue de son esprit & la grandeur de son ame.

Il eût été heureux pour ses amis qu'elle n'eût pas entrepris cet ouvrage dont les savants vont jouir. On peut dire d'elle, en déplorant sa destinée, *perit arte sua.*

Elle se crut frappée à mort long-tems avant le coup qui nous l'a enlevée : dès lors elle ne songea plus qu'à employer le peu de tems qu'elle prévoyoit lui rester à finir ce qu'elle avoit entrepris , & à dérober à la mort ce qu'elle regardoit comme la plus belle partie d'elle même. L'ardeur & l'opiniâtreté du travail, des veilles continuelles, dans un tems où le repos l'auroit sauvée, amenerent enfin cette mort qu'elle avoit prévue. Elle sentit sa fin approcher, & par un mélange singulier de sentimens qui sembloient se combattre, on la vit regretter la vie, & regarder la mort avec intrépidité : la douleur d'une séparation éternelle affligeoit sensiblement son ame, & la Philosophie dont cette ame étoit remplie lui laissoit tout son courage. Un homme qui s'arrachant tristement à sa famille qui le pleure, & qui fait tranquillement les préparatifs d'un long voyage, n'est que le faible portrait de sa douleur & de sa fermeté : de sorte que ceux qui furent les témoins de ses derniers momens sentoient doublement sa perte par leur propre affliction & par ses regrets, & admiroient en même tems la force de son esprit, qui mêloit à des regrets si touchans une constance si inébranlable.





P R É F A C E

DE MONSIEUR NEWTON

à la premiere édition des Principes en 1686.

LES Anciens, comme nous l'apprend Pappus,* firent beaucoup de cas de la Méchanique dans l'interprétation de la nature, & les modernes ont enfin, depuis quelque tems, rejeté les formes substantielles & les qualités occultes, pour rappeler les Phénomènes naturels à des loix mathématiques. On s'est proposé dans ce Traité de contribuer à cet objet, en cultivant les Mathématiques en ce qu'elles ont de rapport avec la Philosophie naturelle.

Les anciens partagerent la Méchanique en deux classes; l'une théorique, qui procède par des démonstrations exactes; l'autre pratique. De cette dernière ressortissent tous les Arts qu'on nomme Méchaniques, dont cette science a tiré sa dénomination: mais comme les Artisans ont coutume d'opérer peu exactement, de là est venu qu'on a tellement distingué la Méchanique de la Géométrie, que tout ce qui est exact, s'est rapporté à celle-ci, & ce qui l'étoit moins, à la premiere. Cependant les erreurs que commet celui qui exerce un art, font de l'artiste

* Coll. Math. Liv. 3. proem.

& non de l'art. Celui qui opere moins exactement est un Mécanicien moins parfait, & conséquemment celui qui opérera parfaitement, fera le meilleur.

La Géométrie appartient en quelque chose à la Méchanique; car c'est de cette dernière que dépend la description des lignes droites & des cercles sur lesquels elle est fondée. Il est effectivement nécessaire que celui qui veut s'instruire dans la Géométrie sache décrire ces lignes avant de prendre les premières leçons de cette science : après quoi on lui apprend comment les problèmes se résolvent par le moyen de ces opérations. On emprunte de la Méchanique leur solution : la Géométrie enseigne leur usage, & se glorifie du magnifique édifice qu'elle élève en empruntant si peu d'ailleurs. La Géométrie est donc fondée sur une pratique méchanique, & elle n'est autre chose qu'une branche de la Méchanique universelle qui traite & qui démontre l'art de mesurer. Mais comme les Arts usuels s'occupent principalement à remuer les corps, de-là il est arrivé que l'on a assigné à la Géométrie, la grandeur pour objet, & à la Méchanique, le mouvement : ainsi la Méchanique théorique sera la science démonstrative des mouvemens qui résultent des forces quelconques, des forces nécessaires pour engendrer des mouvemens quelconques.

Les anciens qui ne considérèrent gueres autrement la pesanteur que dans le poids à remuer, cultivèrent cette partie de la Méchanique dans leurs cinq puissances qui regardent les arts manuels ; mais nous qui avons pour objet, non les Arts, mais l'avan-

cement de la Philosophie, ne nous bornant pas à considérer seulement les puissances manuelles, mais celles que la nature employe dans ses opérations, nous traitons principalement de la pesanteur, la légèreté, la force électrique, la résistance des fluides & les autres forces de cette espèce, soit attractives, soit répulsives: c'est pourquoi nous proposons ce que nous donnons ici comme les principes Mathématiques de la Philosophie naturelle. En effet toute la difficulté de la Philosophie paroît consister à trouver les forces qu'employe la nature, par les Phénomènes du mouvement que nous connoissons, & à démontrer ensuite, par là, les autres Phénomènes. C'est l'objet qu'on a eu en vue dans les propositions générales du I. & II. Livre, & on en donne un exemple dans le III. en expliquant le système de l'Univers: car on y détermine par les propositions Mathématiques démontrées dans les deux premiers Livres, les forces avec lesquelles les corps tendent vers le Soleil & les Planètes; après quoi, à l'aide des mêmes propositions Mathématiques, on déduit de ces forces, les mouvemens des Planètes, des Comètes, de la Lune & de la Mer. Il seroit à désirer que les autres Phénomènes que nous présente la nature, pussent se dériver aussi heureusement des principes mécaniques: car plusieurs raisons me portent à soupçonner qu'ils dépendent tous de quelques forces dont les causes sont inconnues, & par lesquelles les particules des corps sont poussées les unes vers les autres, & s'unissent en figures régulières, ou sont repoussées & se fuyent mutuellement; & c'est l'igno-

rance

rance où l'on a été jusques ici de ces forces, qui a empêché les Philosophes de tenter l'explication de la nature avec succès. J'espère que les principes que j'ai posés dans cet Ouvrage pourront être de quelque utilité à cette maniere de philosopher, ou à quelque autre plus véritable, si je n'ai pas touché au but.

L'ingénieux M. Halley, dont le sçavoir s'étend à tous les genres de littérature, a non seulement donné ses soins à cette Edition, en corrigeant les fautes de l'impression, & en faisant graver les figures: mais il est celui qui m'a engagé à la donner. Car après avoir obtenu de moi ce que j'avois démontré sur la forme des orbites planétaires, il ne cessa de me prier d'en faire part à la Société Royale, dont les instances & les exhortations gracieuses me déterminèrent à songer à publier quelque chose sur ce sujet. J'y travaillai; mais après avoir entamé la question des irrégularités de la Lune, & diverses autres concernant les loix & la mesure de la pesanteur & des autres forces, les figures que décriroient les corps attirés par des forces quelconques, les mouvemens de plusieurs corps entre eux, ceux qui se font dans des milieux résistans, les forces, les densités & les mouvemens de ces milieux, les orbites enfin des Comètes; je pensai qu'il étoit à propos d'en différer l'édition jusques à un autre tems, afin d'avoir le loisir de méditer sur ce qu'il restoit à trouver, & de donner un ouvrage complet au public: ce que je fais à présent. A l'égard des mouvemens lunaires, ce que j'en dis étant encore imparfait, je l'ai renfermé dans les corrolaires de la proposition L X V I. du I. Livre, de crainte d'être

obligé d'exposer & de démontrer chaque point en particulier : ce qui m'auroit engagé dans une prolixité superflue , & auroit troublé la suite des propositions.

J'ai mieux aimé placer dans quelques endroits, quoique peu convenables , des choses que j'ai trouvées trop tard , plutôt que de changer les numero des oppositions & des citations qui s'y rapportoient.

Je prie les sçavans de lire cet Ouvrage avec indulgence , & de regarder les défauts qu'ils y trouveront , moins comme dignes de blame , que comme des objets qui méritent une recherche plus approfondie & de nouveaux efforts.

A Cambridge , du Collège de la Trinité , le 8. Mai 1686.

IS. NEWTON.





PRÉFACE DE L'AUTEUR

à la tête de la seconde Edition.

CETTE seconde Edition paroît corrigée dans plusieurs Articles & avec quelques additions. Dans la seconde Section du premier Livre on a rendu plus facile la maniere de trouver les forces nécessaires pour faire mouvoir un corps dans des orbites données ; & dans la Section VII. du second Livre, on a recherché avec plus de soin, la théorie de la résistance des fluides, qu'on confirme par de nouvelles expériences. Dans le III. Livre, on déduit d'une façon plus complete, la théorie de la Lune & la précession des Equinoxes, & l'on a ajouté à la théorie des Cometes un plus grand nombre d'exemples d'orbites calculées, & avec plus de soin : ce qui lui donne une nouvelle confirmation.

A Londres, ee 28. Mars 1713.

I S. NEWTON.





PRÉFACE DE L'AUTEUR

à la troisième édition.

DANS cette troisième Edition, dont a eu soin M. Camberton, Docteur en médecine, très-habile dans ces matieres; on explique plus au long quelques points concernant la résistance des milieux, & on a ajouté quelques nouvelles expériences sur la chute des graves dans l'air. On explique aussi avec plus de détail dans le Livre troisième, la démonstration qui prouve que la Lune est retenue dans son orbite par la force de la gravité. Le même Livre est augmenté des Observations nouvelles faites par M. Pound sur la proportion des axes de Jupiter entre eux, de même que de quelques autres concernant la Comete de 1680, faites en Allemagne par M. Kirch, & qui ne nous sont parvenues que depuis peu. Elles montrent de nouveau combien les orbites paraboliques approchent de celles des Cometes. On détermine avec plus d'exactitude l'orbite de cette Comete fameuse, suivant les calculs de M. Halley, & cela dans l'ellipse; d'où l'on fait voir que cette Comete se mouvant dans une orbite de cette forme, eut pendant neuf signes, un cours qui ne fut pas moins régulier que celui des Planetes dans leurs orbites propres. On y a enfin ajouté la détermination de l'orbite de la Comète de 1723, calculée par M. Bradley, Professeur d'Astronomie à Oxford.

A Londres le 12 Janvier 1725-6.

IS. NEWTON.



PREFACE DE M. CÔTES

*Sur la présente Edition des Principes mathématiques
de la Philosophie Naturelle de M. NEWTON.*

Nous donnons enfin au Public une nouvelle Édition de la Philosophie de M. de Newton, désirée depuis long-tems, & supérieure aux précédentes, par les corrections & les augmentations que l'Auteur y a faites. La Table des Matières est suffisante pour faire connoître au Lecteur tout ce que renferme cet excellent Ouvrage; & la Préface de M. Newton l'instruira pareillement des additions & des changemens qu'il a jugé nécessaires & convenables. Nous n'avons donc ici qu'à exposer en peu de mots quelle est la méthode dont il fait usage dans cette nouvelle Philosophie.

On peut rapporter à trois différentes classes tous les Auteurs qui ont entrepris de traiter la Physique. On a vu d'abord des Philosophes qui ont donné à chaque espèce particulière de corps des qualités occultes & propres à chacun, d'où ils ont ensuite fait dépendre d'une manière encore plus occulte les Phénomènes dont nous sommes témoins. C'est-là le fondement de la Philosophie de l'Ecole, enseignée par *Aristote* & par les Péripatéticiens. Selon eux, chaque effet particulier dépend absolument d'une certaine Nature propre à chacun des corps qui en est le sujet ou la cause; mais ils gardent un profond silence sur la cause & le principe de cette Nature. Puis donc qu'ils ont laissé les choses pour ne s'occuper que des mots; on ne doit les regarder tout au plus que comme les inventeurs d'une espèce de jargon philosophique, & non comme les auteurs d'une véritable Philosophie.

D'autres ont pris le parti d'abandonner des mots vuides de sens, & se sont flattés d'acquérir une gloire plus solide par des travaux plus réels. Ils ont donc posé pour principe, que toute la matière en général est de même nature ou homogène; & que la variété que l'on remarque dans tout corps en particulier par sa configuration extérieure, ne dépend que de quelques affections très-simples en elles-mêmes, & très-faciles à concevoir. Rien de mieux que de procéder ainsi du plus simple au plus composé; pourvu néanmoins que l'on ne donne pas à ces propriétés primitives & primordiales d'autres modes ni d'autres bornes que celles que la Nature a prescrites elle-même. Mais bientôt ces derniers Philosophes admirent à leur gré telles grandeurs & telles figures qu'ils jugerent à-propos; ima-

gèrent au besoin des mouvemens & des positions respectives dans les parties composantes des corps : enfin ils forgerent des fluides invisibles, donés d'une subtilité miraculeuse, agités par des mouvemens secrets, capables de pénétrer les pores de tous les Corps, comme si la matiere n'opposoit aucune résistance ; & par-là ils tomberent dans des rêveries aussi ridicules que celles des Anciens, en négligeant de s'instruire & d'examiner la véritable constitution de la nature ; connoissance qu'on ne doit pas assurément chercher dans des conjectures trompeuses, puisque les observations les plus incontestables ont encore bien de la peine à nous la procurer.

Venons à la troisième classe, à ceux qui dans leur Philosophie ne reconnoissent d'autre regle que l'expérience. Ces derniers, bien convaincus que l'on doit, autant qu'il est possible, faire dépendre les effets des causes les plus simples, n'admettent cependant aucun principe qui ne soit prouvé par des observations constantes. Ils ne font point d'hypothèses, & n'en reçoivent aucunes en physique, si ce n'est pour les soumettre à l'examen & reconnoître leur vérité ou leur fausseté par une discussion exacte & rigoureuse. Ils employent dans cette recherche les deux méthodes connues de tout le monde, l'Analyse & la Synthèse. Avec le secours de la première, de quelques Phénomènes choisis adroitement, ils déduisent les forces de la Nature, & les loix les plus simples qui dérivent de ces mêmes forces ; ils exposent ensuite synthétiquement l'ordre & la disposition des autres qui dépendent immédiatement de ces premières. C'est-là sans doute la meilleure Philosophie, & c'est aussi celle qu'a choisie notre illustre Auteur & qu'il a cru justement préférable à toute autre. C'est la seule qu'il ait jugée digne de ses soins & de ses travaux, & qu'il ait cru devoir perfectionner & embellir. L'explication du système du Monde qui se déduit si facilement de sa Théorie de la gravité, est à la fois une heureuse application de cette nouvelle philosophie, & un modèle que l'on ne peut trop imiter. Quelques Philosophes, avant M. Newton, ont soupçonné que la pesanteur pouvoit être une propriété commune à tous les corps ; d'autres l'ont imaginé gratuitement : notre Philosophe est le premier & le seul qui ait pu le démontrer par les Phénomènes, & en faire le fondement inébranlable des Théories les plus brillantes.

Je n'ignore pas que des personnages illustres & de grand nom dans les Sciences n'ont accordé qu'avec peine leur suffrage à ce nouveau principe ; peut-être par un effet de certains préjugés, qui faisoient une impression trop forte sur leur esprit : je sçais même, qu'ils ont quelquefois préféré des conjectures vagues à des vérités certaines. Mon dessein n'est point d'attaquer ici leur réputation, mais seulement de mettre mon Lecteur en état de porter un jugement équiva-

table, par une exposition abrégée des découvertes du Chevalier Newton, sur la matière dont il est question.

Commençons donc d'abord par ce qu'il y a de plus simple & de plus à notre portée : jettons les yeux sur notre globe, & voyons quelle est la nature de la gravité dans les Corps sublunaires ; afin d'être plus assurés dans nos recherches, lorsque nous en ferons aux Corps célestes qui se trouvent si éloignés de notre habitation. Tous les Philosophes sont d'accord pour admettre une gravitation générale de tous les Corps terrestres vers notre globe. On est convaincu par un grand nombre d'expériences, qu'il n'y a pas de Corps vraiment léger. Ce que l'on appelle légèreté n'est qu'une propriété relative & apparente ; ce n'est pas une légèreté absolue & véritable ; on sçait qu'elle dépend d'une gravité plus puissante des Corps environnants.

Cela posé, puisque les Corps gravitent vers la terre, il faut aussi que la terre grave également vers les Corps ; car il est aisé de prouver, comme on va le faire tout à l'heure, que l'action de la gravité est égale & réciproque. Imaginons la masse de la terre partagée en deux parties quelconques, égales ou inégales. Si les efforts ou les poids de chaque partie l'une vers l'autre n'étoient pas égaux, la plus foible céderoit nécessairement à la plus forte, & les deux parties ainsi unies continueroient de se mouvoir à l'infini vers le point du ciel opposé à la direction de la plus pesante ; ce qui est absolument contraire à l'expérience ; il faut donc dire que les poids des parties sont dans un parfait équilibre, c'est-à-dire, que l'action de la gravité est égale & réciproque.

Les poids des corps également éloignés du centre de la terre sont comme les quantités de matière qu'ils renferment. C'est une suite nécessaire de l'égalité d'accélération des corps qui tombent par la seule force de leur pesanteur ; car il est évident que des forces qui impriment à des corps inégaux des degrés égaux de vitesse, doivent être proportionnelles à la quantité de matière qu'il faut mettre en mouvement. D'ailleurs on est maintenant assuré que tous les corps reçoivent une égale accélération ; puisque, dans l'évide de Boile, ils décrivent tous des espaces égaux en tems égaux ; n'étant plus différemment arrêtés par la résistance de l'air. La même vérité est encore prouvée avec plus d'exactitude par l'expérience des pendules.

Les forces attractives * des corps à distances égales sont comme les quantités de matière contenues dans ces mêmes corps. Car puis-

* On remarquera ici que M. Côté employe le mot de force attractive pour exprimer la pesanteur, comme a fait M. Newton. En général, toutes ces expressions, force attractive, attraction, gravité, gravitation, pesanteur, ne signifient rien autre chose que cette tendance de tous les corps vers un centre commun de pesanteur, soit que cette tendance qui produit réellement une force, soit occasionnée dans les corps par un mécanisme que nous ignorons ; soit que

que les corps gravitent vers la terre, & que celle-ci gravite vers les corps avec des momens égaux, le poids de la terre sur un corps quelconque, ou, ce qui est la même chose, la force avec laquelle un corps attire la terre, sera égale à la pesanteur de ce même corps vers la terre. Mais dans chaque corps, le poids est proportionnel à la quantité de matière : donc la force avec laquelle un corps attire la terre, ou, ce qui revient au même, la force absolue de ce corps sera comme la même quantité de matière qu'il renferme.

Il suit de-là que la force attractive (ou la pesanteur) des corps résulte des forces attractives (ou des pesanteurs) de chaque partie qui les composent ; puisque cette force de gravitation augmente ou diminue selon que la quantité de matière augmente ou diminue. Il faut regarder l'action de la terre comme le résultat des actions réunies de toutes ses parties ; & par conséquent il faut que tous les corps terrestres s'attirent avec des forces absolues qui soient en raison de la matière attirante. Telle est la nature de la gravité sur la terre : voyons maintenant ce qu'elle est dans les cieux.

C'est une loi de la Nature reçue de tous les Philosophes, qu'un corps restera toujours en repos, ou continuera de se mouvoir en ligne droite, tant qu'il ne sera point soumis à l'action de forces étrangères qui l'obligent de changer de situation. Il suit de-là que les corps qui se meuvent dans des courbes, & qui par conséquent s'écartent continuellement des lignes droites qui touchent leurs orbites, sont aussi continuellement retenus dans cette route curviligne par l'action d'une force qui leur est perpétuellement appliquée. Donc, pendant que les planètes décrivent leurs trajectoires, elles seront continuellement détournées des tangentes à chaque point de la courbe, par l'action répétée d'une force toujours présente.

Il y encore un principe qu'il faut accorder, & que l'on démontre géométriquement, c'est que lorsque des corps mus dans une courbe qui se trouve sur un même plan décrivent autour d'un point fixe ou mobile des aires proportionnelles aux tems, ils sont poussés par des forces qui tendent vers ce même point : donc puisque tous les Astronomes conviennent que les Planètes principales décrivent autour du soleil des aires proportionnelles aux tems, de même que les satellites de chacune de ces Planètes du premier ordre autour de ces mêmes Planètes ; il faut conclure que la force qui les détourne continuellement des tangentes de leurs orbites pour les faire circu-

plutôt elle soit une propriété continuellement imprimée à la matière par un pur effet de la volonté du Créateur, qui veut produire par-là tous les Phénomènes dont nous sommes témoins. Il ne s'agit ici que du fait ; les noms sont indifférens & présenteroient tous les mêmes difficultés pour quiconque n'entretoit pas bien dans l'esprit de l'Auteur. Voyez à ce sujet le Chapitre II. des Discours de M. de Maupertuis, sur la Fig. des Astres, pag. 16 de la nouvelle édition. On ne peut rien de plus lumineux que cette excellent morceau, qui est une discussion (vraiment) métaphysique sur l'attraction, comme son titre l'annonce.

ler dans ces mêmes courbes, est aussi continuellement dirigée vers les corps qui se trouvent aux foyers de ces orbites. C'est donc avec raison que l'on peut appeller cette force une force *centripete* à l'égard du corps *circulant*; & une force *attractive* à l'égard du corps *central*, quelle que soit la cause qui produit cette force.

De plus, il est pareillement démontré géométriquement que si plusieurs corps se meuvent uniformément dans des cercles concentriques, de manière que les quarrés des temps périodiques soient entr'eux comme les cubes des distances au centre commun; les forces de chacun de ces corps seront réciproquement comme les quarrés des mêmes distances. On démontre avec la même facilité que, si des corps font leurs révolutions dans des orbites qui ne diffèrent presque pas du cercle, & dont les abscides soient fixes; les forces centripetes de ces corps seront comme les quarrés des distances. Or de l'aveu constant de tous les Astronomes toutes les planètes se trouvent dans l'un ou l'autre cas; donc leurs forces centripetes sont réciproquement comme les quarrés de leurs distances au centre. Si l'on nous objecte que les abscides des orbites de chaque Planète, & particulièrement de la Lune, ne sont pas dans un repos parfait; mais qu'ils ont un mouvement fort lent suivant l'ordre des signes; on peut répondre que, quand même nous accorderions que cette erreur vient de ce que la loi de la force centripete s'éloigne tant soit peu de la raison doublée inverse des distances; néanmoins il est aisé de calculer jusqu'où peut aller l'erreur qui suit de cette fautive supposition, & de faire voir qu'elle est absolument insensible. En effet, quoique la loi de la force centripete de la Lune qui est la plus sujette à être troublée dans ses mouvemens, surpasse un peu le rapport de la raison doublée; néanmoins elle en approche soixante fois davantage que de la raison triplée. On peut encore réfuter cette objection plus solidement en soutenant, comme il est démontré dans cet Ouvrage, que ce mouvement des abscides ne vient pas de ce que l'intensité des forces centripetes s'éloigne de la raison doublée, mais qu'il dépend réellement d'une cause totalement différente: ainsi il faudra toujours admettre comme un principe incontestable, que les Planètes principales tournent autour du Soleil, & les secondaires autour des premières, par l'action de forces centripetes qui suivent précisément la raison inverse des quarrés des distances.

De ce que l'on vient de dire, il suit évidemment que les Planètes sont retenues dans leurs orbites par une force qui agit continuellement sur elles; que cette force est toujours dirigée vers le centre de ces orbites; qu'elle augmente à mesure que les Planètes approchent du centre, & qu'elle diminue à mesure qu'elles s'en éloignent;

que l'augmentation croît comme le quarré de la distance décroît. Examinons présentement par une comparaison bien établie, si la pesanteur qui fait tomber les corps sur notre globe n'est pas de même nature que les forces centripètes qui retiennent les Planètes dans leurs orbites. Le moyen de s'en assurer, c'est de voir si l'on ne pourra pas trouver de part & d'autre les mêmes loix & les mêmes propriétés : pour y parvenir, commençons par chercher quelle est la force centripète de la lune qui est le corps le plus proche de notre globe.

Les espaces rectilignes parcourus en tombant par des corps quelconques depuis le point de repos, pendant un tems donné, sont proportionnels aux forces qui les poussent ; c'est une proposition démontrée dans toute la rigueur géométrique : donc la force centripète de la Lune parcourant son orbite, sera à la force de la pesanteur sur la surface de la terre, comme l'espace que la lune décrirait en descendant vers la terre, dans un temps infiniment petit en vertu de sa force centripète, si elle n'avait point de mouvement de révolution, est à l'espace que parcourt dans le même tems un corps près de la surface de la terre par la seule force de la pesanteur. Le premier des espaces dont on vient de parler est égal au sinus-verse de l'arc décrit par la lune, pendant le même tems ; puisque ce sinus-verse mesure la quantité dont la force centripète a écarté la lune de la tangente ; cet espace peut se calculer par la connoissance du tems périodique de la lune & de sa distance au centre. L'autre espace dont nous avons parlé, se déduit de la théorie des pendules, suivant les expériences de M. *Huyghens*. Si l'on fait le calcul on trouvera que le premier espace est au second, ou, ce qui revient au même, que la force centripète qui retient la lune dans son orbite est à la force de la pesanteur sur la surface de la terre, comme le quarré du demi diamètre de la terre est au quarré du demi diamètre de l'orbite de la lune. D'ailleurs, suivant ce qui précède, la force centripète de la lune dans son orbite est à la force centripète de la lune auprès de la surface de la terre dans la même raison ; donc la force centripète de la lune & la force de la pesanteur sur la surface de la terre sont entièrement égales. Ce ne sont donc point deux forces distinctes & différentes, mais précisément une seule & même force ; car si ces deux forces avoient lieu en même tems & se trouvoient néanmoins distinguées l'une de l'autre près de la surface de la terre, les corps tomberoient deux fois plus vite que par la seule force de la pesanteur. Il est donc certain que cette force centripète qui retient la lune dans son orbite en l'écartant de la tangente, par attraction ou par impulsion, n'est autre chose que la force de la pesanteur terrestre qui s'étend jusques à la lune ; & la raison seule nous fait voir

que cette force peut avoir son effet à des distances encore plus grandes, puisque nous ne pouvons pas observer la moindre diminution sensible au sommet des plus hautes montagnes. La lune gravite donc vers la terre, & par une action réciproque la terre gravite vers la lune : on verra cette proposition confirmée dans cet Ouvrage, lorsqu'il est question du flux & reflux de la mer & de la précession des Équinoxes, Phénomènes qui dépendent tous deux de l'action combinée de la lune & du soleil sur la terre. Cette même comparaison que l'on vient de faire nous apprend en même tems la loi suivant laquelle décroît la force de la pesanteur dans les grandes distances de la terre ; car puisque la pesanteur des corps terrestres ne diffère pas de la force centripète de la lune, qui décroît en raison des carrés des distances ; la pesanteur suivra donc aussi la même loi, & diminuera dans la même proportion.

Venons présentement aux autres planetes. Puisque les révolutions des planetes principales autour du soleil, celles des Satellites de Jupiter & de Saturne, autour de ces deux Planetes sont des phénomènes de même nature que la révolution de la lune autour de la terre ; puisqu'il est démontré de plus que les forces centripètes de ces planetes sont dirigées vers le centre du soleil, & que celles des Satellites de Jupiter & de Saturne sont pareillement dirigées vers le centre de chacune de ces deux planetes, comme la force centripète de la lune est elle-même dirigée vers le centre de la terre ; enfin puisque toutes ces forces sont réciproquement proportionnelles aux carrés de leurs distances, de même que la force de la lune (comparée à celle des corps terrestres) est réciproquement comme le carré de sa distance : il faudra donc conclure que toutes ces forces sont de même espèce. Ainsi de même que la lune gravite sur la terre, & la terre sur la lune ; de même aussi toutes les planetes secondaires graviteront vers les planetes principales, & celles-ci graviteront toutes vers leurs Satellites ; de même enfin toutes les planetes graviteront vers le soleil, & le soleil gravitera vers toutes les planetes.

Il faut donc reconnoître que le soleil gravite sur toutes les planetes, & que toutes les planetes pèsent réciproquement sur celui-ci. Car pendant que les Satellites accompagnent leur planete principale, ils sont en même tems leurs révolutions autour du soleil, ainsi que cette même planete : donc il est prouvé par le même raisonnement que les planetes principales & secondaires pèsent vers le soleil, & que le soleil pèse vers elles. On a encore outre cela d'autres preuves de la pesanteur des planetes secondaires vers le soleil, déduites des inégalités du mouvement de la lune, dont on trouvera une théorie exacte exposée avec toute la sagacité possible dans la troisième partie de cet Ouvrage.

On peut encore déduire du mouvement des Comètes que la force attractive du soleil se fait sentir à des distances énormes dans toutes les parties de l'étendue. En effet ces corps, après avoir parcouru un intervalle immense, s'approchent continuellement du soleil; & quelquefois ils sont si près de ce globe qu'ils paroissent presque le toucher lorsqu'ils se trouvent dans leur périhélie. C'est en vain que les Astronomes des siècles précédents ont cherché à établir une théorie de ces nouvelles planètes; cette découverte étoit réservée à notre siècle, & à notre illustre Auteur, qui nous a donné des méthodes aussi faciles dans la pratique qu'elles sont conformes aux observations. Il est donc évident que les Comètes se meuvent dans des sections coniques qui ont leur foyer au centre du soleil; & que les rayons menés du soleil aux différents points de leurs trajectoires décrivent des aires proportionnelles aux tems. Il suit encore évidemment de ces Phénomènes, & l'on peut aussi le démontrer géométriquement, que les forces qui retiennent les Comètes dans leurs orbites sont dirigées vers le soleil, & que leur intensité est en raison inverse des quarrés de leurs distances au centre de ce même astre. Donc les Comètes gravitent vers le soleil, & par conséquent la force attractive du soleil s'étend non-seulement aux différentes planètes qui se trouvent à des distances finies, & qui sont presque toutes dans un même plan; mais elle agit encore sur les Comètes qui se trouvent placées dans toutes les différentes parties du Ciel, & à toutes sortes de distances. Telle est donc la nature des corps pesants, qu'ils font sentir leur action à toutes les distances imaginables sur tous les autres corps pesants. Il suit encore de-là que les Planètes & les Comètes s'attirent mutuellement, & que tous ces corps gravitent réciproquement les uns vers les autres; & cette conséquence se trouve confirmée par les inégalités des mouvemens de Jupiter & de Saturne, connues des Astronomes, & causées par les actions réciproques de ces planètes les unes sur les autres. Le mouvement si lent des apsidés, & dont on a parlé ci-devant, vient encore à l'appui de cette vérité, & dépend de causes entièrement semblables.

Il faut reconnoître maintenant d'après tout ce que l'on vient de voir, que la terre, le soleil & tous les corps célestes qui accompagnent le soleil ont une gravitation réciproque les uns vers les autres, par laquelle ils paroissent s'attirer. Donc chacune de leurs parties, si petite qu'elle soit, a pareillement une force d'attraction proportionnelle à sa masse, suivant ce que l'on a dit plus haut sur les corps terrestres: à différentes distances, les forces de ces mêmes parties seront réciproquement comme les quarrés des distances; car il est encore démontré que les globes qui attirent, suivant cette loi, doivent être

composés de parties attirantes dans la même raison.

Les conséquences que l'on vient de déduire, sont fondées sur cet axiome reçu de tous les Philosophes, que les effets de même genre dont les propriétés connues sont les mêmes, ont aussi les mêmes causes, d'où naissent les mêmes propriétés, quoique ces causes ne soient pas encore connues. Qui doute en effet, si c'est la pesanteur qui fait tomber les pierres en Europe, que ce ne soit aussi la même pesanteur qui les fasse tomber en Amérique? Si la pesanteur est réciproque entre la terre & les pierres en Europe, qui pourra nier qu'elle ait la même propriété en Amérique? Si la force attractive de la terre ou d'une pierre est le résultat des forces attractives des parties dans l'Europe; ne faut-il pas aussi qu'en Amérique elle résulte d'une pareille combinaison? Si la force de la pesanteur se trouve dans toutes les espèces de corps, & se fait sentir à toutes sortes de distances en Europe, pourquoi voudrions-nous soutenir qu'elle n'aurait pas aussi les mêmes propriétés en Amérique? Cette règle est la base de toute la Philosophie; supprimez la & vous ne pourrez plus rien établir d'universel. On ne connoît la nature de chaque chose que par les observations & les expériences, & de-là il suit que nous ne jugeons que par cette règle d'analogie.

Puis donc que tous les corps terrestres & célestes que nous pouvons observer, ou sur lesquels nous pouvons faire des expériences, sont des corps pesants; il faudra dire que la pesanteur est une propriété qui convient à tous les corps; & de même que nous n'en pouvons concevoir aucuns qui ne soient étendus, mobiles & impénétrables, nous ne pouvons pas non plus en concevoir qui ne soient pesants. C'est par l'expérience que nous connoissons l'étendue, la mobilité & l'impénétrabilité des corps, & c'est aussi par l'expérience que nous connoissons leur gravité. Tous les corps que nous avons pu observer sont étendus, mobiles & impénétrables; & nous en concluons que tous, ceux même sur lesquels nous n'avons pas pu faire d'observations, sont pareillement étendus, mobiles & impénétrables. Tous les corps que nous avons pu observer sont pesants, & nous concluons légitimement de même que ceux sur lesquels nous n'avons point fait d'expériences, sont aussi des corps pesants. Si l'on nous dit que les corps des étoiles fixes n'ont point de gravité, parce que l'on n'a pas encore pu l'observer, on pourra nous prouver aussi par le même raisonnement que ces corps ne sont ni étendus, ni mobiles, ni impénétrables; car on n'a pas encore observé ces propriétés dans les fixes. Mais à quoi bon m'arrêter plus long-temps? il faut que la pesanteur soit une des propriétés primitives de tous les corps, ou que l'on cesse de regarder comme telle leur étendue.

leur mobilité, leur impenétrabilité; il faut que l'on puisse expliquer exactement les phénomènes de la nature par la loi de la pesanteur, ou que l'on renonce à en donner une explication raisonnable en faisant usage de l'étendue, de la mobilité & de l'impenétrabilité des corps.

Je ne doute pas qu'on ne désapprouve cette conclusion, & qu'on ne me reproche de ramener les qualités occultes. On ne cesse de nous objecter que la gravité est une qualité de cette espèce, & qu'on doit bannir absolument de la philosophie toutes les explications fondées sur de pareilles causes: mais nous pouvons répondre que l'on ne doit pas appeler occultes des qualités dont l'existence est évidemment démontrée par l'expérience; mais celles-là seulement qui n'en ont qu'une imaginaire, & qui ne sont prouvées en aucune manière. Ceux qui ont réellement recours aux qualités occultes sont ceux qui, pour expliquer les mouvemens de la nature, ont imaginé des tourbillons d'une matière qu'ils forgent à plaisir, & qui ne tombe sous aucun sens.

Faudra-t-il donc rejeter la gravité de tous les ouvrages philosophiques, comme une qualité occulte, par ce que l'on ignore jusqu'à présent la cause de cette même gravité? En établissant de pareils principes, que l'on prenne garde de donner dans des absurdités manifestes, & de ruiner par-là tous les fondemens de la Philosophie. En effet toutes les causes sont liées les unes aux autres par une chaîne non interrompue, & se déduisent les unes des autres en allant du plus simple au plus composé. Si vous arrivez une fois à la cause la plus simple, il ne vous sera pas possible de remonter plus haut; car on ne peut pas donner une explication mécanique de la cause la plus simple; & si cela se pouvoit, dès-lors elle cesseroit d'être telle. Il faudra donc traiter de qualités occultes les causes de cette nature, & les bannir de la Philosophie; ce qui ne peut avoir lieu, que l'on n'exclue pareillement toutes celles qui dépendent immédiatement des premières, & celles qui se déduisent des secondes, & ainsi de suite jusqu'à ce que l'on ait absolument supprimé toutes les causes des phénomènes qu'il faut expliquer.

D'autres regardent la gravité comme un effet surnaturel, & veulent que ce soit un miracle perpétuel, d'où ils concluent qu'il faut la rejeter, puisque les causes surnaturelles ne doivent point avoir lieu en physique. Une objection si misérable, & qui renverse toute philosophie, mérite à peine que l'on y réponde; car suivant cette idée, ils se trouvent réduits à l'une de ces deux extrémités, ou de soutenir, contre toute évidence, que la pesanteur n'est pas une propriété commune à tous les corps; ou de regarder comme surnaturel tout ce qui ne dépend pas des autres propriétés des corps, ou d'une cause

mécanique. Il est cependant constant qu'il y a dans les corps des propriétés primitives, & qui par cette raison ne peuvent dépendre d'autres propriétés : que l'on examine donc si ces propriétés ne sont pas surnaturelles, & par conséquent dans le cas d'être réjettées ; qu'on voye enfin ce que deviendrait la Philosophie avec de tels raisonnemens.

Il a encore une autre espèce de Philosophes qui ne rejettent la Physique céleste de M. Newton que parce qu'elle est opposée au système de Descartes, & ne paraît pas pouvoir s'accorder avec les principes de ce Philosophe. Nous ne pouvons pas les empêcher de suivre leur sentiment ; mais il faut qu'ils se conduisent de même à notre égard, & qu'ils ne refusent pas aux autres une liberté qu'ils veulent qu'on leur accorde. Qu'il nous soit donc permis d'embrasser la Philosophie de Newton, & de nous y attacher, parce qu'elle nous paraît plus véritable ; qu'il nous soit permis de préférer des causes prouvées par les phénomènes à des causes fictives, & qui ne sont confirmées par aucune expérience. Une vraie Philosophie ne doit employer dans l'explication de la nature que des causes vraiment existantes ; elle ne doit point chercher les loix par lesquelles le Tout-puissant auroit pu produire l'ordre admirable qui regne dans cet univers, s'il avoit jugé à-propos de les employer ; mais seulement celles qu'il a réellement établies par un acte libre de sa volonté. En effet, nous pouvons croire raisonnablement qu'un même effet peut être produit par plusieurs causes différentes ; mais la vraie cause pour un Philosophe, est celle qui produit actuellement l'effet dont il est question : la bonne Philosophie n'en reconnoît point d'autres. Dans les pendules, le même mouvement de l'éguille qui marque les heures peut dépendre également d'un poids suspendu, ou d'un ressort enfermé dans la machine. Si l'on a devant soi une horloge mise en mouvement par un poids, ce seroit une chose ridicule d'imaginer un ressort, & de vouloir expliquer le mouvement de l'éguille par cette hypothèse faite avec trop de précipitation ; car il falloit d'abord considérer attentivement la construction intérieure de la machine, afin de reconnoître par expérience le vrai principe du mouvement proposé : on peut porter à-peu-près le même jugement de ces Philosophes qui commencent par établir que l'espace immense des Cieux est rempli d'une matière extrêmement subtile, & veulent ensuite que cette même matière soit mise dans un mouvement continu par les tourbillons qu'elle a formés ; car il pourroit arriver qu'ils expliquassent tous les Phénomènes par leurs hypothèses, & l'on ne pourroit pas dire pour cela qu'ils nous eussent donné une vraie Philosophie, ni qu'ils eussent découvert les vraies causes des mouvemens célestes ; à moins qu'ils ne nous aient démontré l'une

de ces deux propositions, ou que les causes qu'ils nous donnent existent réellement, ou qu'il n'en pourroit exister d'autres.

Si donc nous faisons voir que l'attraction des corps a réellement lieu dans la nature ; si nous montrons de plus comment on peut expliquer tous les mouvemens célestes par cette propriété ; dès-lors c'est nous faire une objection ridicule & sans force, que de vouloir nous prouver que l'on doit expliquer ces mêmes mouvemens par les tourbillons, quand même nous aurions accordé la possibilité d'une telle explication. Mais il s'en faut de beaucoup, car on ne peut expliquer ces phénomènes en aucune manière par le moyen des tourbillons, c'est une chose si bien prouvée par notre Auteur, démontrée par des raisons si solides, que ce seroit vouloir s'occuper sérieusement de rêveries que de consacrer sans aucun fruit son tems & ses travaux, à rétablir un édifice misérable & chimérique par des éclaircissimens ou des commentaires également inutiles.

En effet, si les corps des Planètes & des Comètes sont emportés autour du Soleil par des tourbillons ; il faut que les corps emportés & les parties du tourbillon voisines de ces corps aient la même vitesse & la même direction ; il faut par conséquent qu'elles aient la même densité ou une même force directement proportionnelle à la quantité de matière. Or il est constant que les Planètes & les Comètes, lorsqu'elles se trouvent dans la même partie du Ciel, ont néanmoins des vitesses & des directions différentes. Il est donc nécessaire que les mêmes parties du fluide céleste, qui sont à égales distances du soleil tournent dans le même tems avec des directions & des vitesses différentes ; car il faut une direction & une vitesse déterminée pour le passage des Planètes ; & il faut dans le même tems une autre vitesse & une autre direction pour le passage des Comètes. Comme ce Phénomène est absolument inexplicable, de deux choses l'une, ou il faudra convenir que tous les corps célestes ne sont pas emportés par un tourbillon ; ou il faudra dire que ce n'est pas un seul tourbillon qui produit tous ces mouvemens ; mais plusieurs qui sont différents les uns des autres, & qui occupent le même espace du Ciel, qu'ils parcourent dans le même tems avec des vitesses & des directions différentes.

Si l'on suppose qu'un même espace contient différents tourbillons, qui se pénètrent mutuellement & font leurs révolutions avec des mouvemens différents ; comme d'ailleurs tous les mouvemens doivent être parfaitement analogues à ceux des corps qu'ils entraînent, lesquels font leurs révolutions avec une régularité surprenante dans des sections coniques tantôt fort excentriques, tantôt presque circulaires ; on peut demander avec raison comment il peut se faire que ces mouvemens se conservent en entier sans jamais avoir été

troublés depuis tant de siècles par les actions diverses de la matière qu'ils rencontrent sans cesse. Si de plus on fait attention que ces mouvemens imaginaires sont plus composés & plus difficiles à expliquer que les mouvemens réels & véritables des Planètes & des Comètes ; on fera bientôt convaincu, ainsi que nous, qu'ils ont été gratuitement introduits dans la Philosophie ; car toute cause doit être plus simple que son effet. Si l'on accorde une fois la liberté d'imaginer tout ce que l'on voudra, on verra bientôt quelqu'un nous assurer que toutes les Planètes & les Comètes sont ainsi que notre terre environnées d'atmosphères ; & d'abord cette hypothèse paroît plus conforme à la raison. On nous dira ensuite que ces atmosphères, par leur nature, se meuvent autour du soleil & décrivent des sections coniques ; & ce mouvement peut encore se concevoir plus facilement qu'un semblable mouvement propre à divers tourbillons qui se pénètrent mutuellement : enfin on établira bientôt, comme une chose absolument hors de doute, que les Planètes & les Comètes sont emportées autour du soleil par leurs atmosphères, & l'on triomphera d'avoir ainsi découvert les causes des mouvemens célestes. Mais quiconque rejette une pareille fiction doit aussi à plus forte raison rejeter la première ; car ces deux hypothèses n'en font absolument qu'une seule.

Galilée a démontré qu'une pierre jettée & mue dans une parabole ne quitte la ligne droite que par la force de la pesanteur, qui est pourtant une qualité occulte. Mais il faut espérer que quelque Philosophe plus fin & plus adroit imaginera un jour une autre cause ; il supposera quelque matière subtile, invisible, palpable, qui ne peut tomber sous aucun sens, mais qui se trouve dans les environs de la surface de la terre ; il soutiendra que cette matière se meut dans toutes sortes de directions, qu'elle obéit à toutes sortes de mouvemens différens & même opposés, & enfin qu'elle décrit toutes sortes de lignes paraboliques ; ensuite il aura bientôt expliqué d'une manière brillante pourquoi la pierre quitte la ligne droite ; & par-là s'attirera l'approbation d'un vulgaire ignorant. Cette pierre, nous dira-t-il, nage dans un fluide subtil, & en suivant son cours, elle doit nécessairement se conformer au mouvement du milieu dans lequel elle se trouve. Or ce fluide se meut dans des lignes paraboliques ; donc il faut absolument que la pierre décrive une parabole. Qui n'admira un si grand Philosophe, un génie si perçant ? est-il possible d'expliquer les Phénomènes de la nature d'une manière plus claire, plus à la portée même du commun, & enfin par des causes plus mécaniques, la matière & le mouvement ? Qui ne rira au contraire de ce pauvre *Galilée*, qui employe le plus grand appareil de Géométrie pour ramener de nouveau des qualités occultes que

l'on avoit si sagement bannies de la Philosophie : mais rougissons de nous amuser à des puerilités de cette nature , & parlons enfin sérieusement.

Tout se réduit à ce qui suit : il y a un nombre infini de Comètes, leurs mouvemens sont extrêmement réguliers , & elles suivent précisément les mêmes loix que les Planètes ; elles se meuvent dans des sections coniques ; leurs trajectoires sont extrêmement excentriques ; il y en a dans toutes les parties du Ciel ; elles parcourent les espaces célestes , & passent auprès des Planètes avec la plus grande facilité ; souvent même elles marchent contre l'ordre des signes : tous ces Phénomènes sont confirmés par les observations astronomiques , & ne peuvent s'expliquer par les tourbillons. Bien plus ils ne peuvent pas même exister si les Planètes se trouvent entraînées par des tourbillons ; enfin le mouvement des Comètes devient absolument impossible , si l'on ne bannit de l'univers , cette matière subtile qui ne doit son existence qu'à l'imagination , & si on ne la fait rentrer dans le néant dont on l'avoit tirée.

Examinons encore cette matière & voyons plus en détail ce qui suit de l'hypothèse des tourbillons. Si les Planètes sont ainsi emportées autour du soleil ; suivant ce que l'on a déjà dit , les parties du tourbillon qui environnent la Planète doivent être de même densité qu'elle ; ainsi toute la matière qui environne le périmètre du grand orbe sera aussi dense que la terre , & celle qui se trouve entre ce grand orbe & celui de Saturne aura autant ou plus de densité ; car pour qu'un tourbillon puisse subsister , il faut que les parties les moins denses soient vers le centre & que les plus denses s'en éloignent. En effet , puisque les quarrés des tems périodiques des Planètes sont comme les cubes des distances au Soleil , il faut que les tems périodiques des parties de chaque tourbillon voisines de la Planète suivent à-peu-près le même rapport : or il suit de là que les forces centrifuges de ces mêmes parties sont en raison inverse des quarrés des distances. Donc celles qui sont plus éloignées ont moins de force centrifuge , & par conséquent si elles ont moins de densité elles céderont à la plus grande force avec laquelle les parties plus voisines du centre tâchent de s'en écarter ; donc les plus denses monteront tandis que les moins denses descendront : il y aura ainsi un changement continuel de lieu jusqu'à ce que toute la matière du tourbillon se trouve tellement disposée qu'elle puisse demeurer en équilibre. Si deux fluides de différente pesanteur spécifique sont contenus dans un même vase , on sçait que le plus pesant va toujours au fond ; & c'est par une raison presque toute semblable que les parties les plus denses d'un tourbillon s'écartent du centre en vertu d'une plus grande force centrifuge. Il faut donc reconnoître que

toute la partie du tourbillon qui se trouve au-dehors de l'orbe de la terre, par rapport au soleil, aura une densité & par conséquent une force d'inertie proportionnée à la quantité de matière, laquelle densité sera au moins égale à la densité & à l'inertie de notre terre; d'où il suit que les Comètes éprouveront une résistance considérable & très-sensible dans leur mouvement, pour ne pas dire capable de le détruire absolument, comme cela est plus que probable. Il est néanmoins certain par la régularité des mouvemens de ces mêmes Comètes, qu'elles n'éprouvent pas la moindre résistance sensible, & par conséquent qu'elles ne trouvent nulle part aucune matière qui puisse leur résister, ou ce qui revient au même, qui ait quelque densité ou quelque force d'inertie. Car la résistance des milieux ne vient que de l'inertie de la matière fluide, ou de la viscosité ou ténacité des parties de ce même fluide. Celle qui vient de cette dernière cause est très-petite & peut à peine être observée dans les fluides connus, à moins que le degré de viscosité ou ténacité ne se trouve très-considérable, comme cela se voit dans l'huile ou le miel. La résistance que l'on éprouve dans l'eau, dans l'air, dans le vif-argent & autres fluides de cette espèce qui n'ont point de viscosité est presque toute de même nature que celle dont nous avons parlé d'abord, & ne peut pas être diminuée par de nouveaux degrés de subtilité, tant que la densité à laquelle elle est toujours proportionnelle, reste la même. Tout ceci est démontré par notre illustre Auteur avec toute la clarté possible, dans sa belle Théorie de la résistance des milieux; Théorie qui se trouve exposée avec beaucoup plus de précision dans cette nouvelle Edition, & qui est encore confirmée davantage par les expériences sur la chute des corps.

On fait que les corps en mouvement le communiquent peu à peu au fluide environnant; cette communication produit une perte, & cette perte ralentit nécessairement la vitesse. La diminution de vitesse est donc proportionnelle au mouvement communiqué, lequel est lui-même comme la densité du fluide lorsque la vitesse est connue: donc la diminution de mouvement ou la résistance sera aussi comme la même densité du fluide, & rien ne peut la supprimer, à moins que le fluide qui vient choquer les parties postérieures du corps en mouvement ne lui rende ce qu'il a perdu par la résistance du milieu. Mais c'est ce que l'on ne peut dire, à moins que l'impression du fluide sur les parties postérieures du corps ne soit égale à celle que le même corps exerce sur les parties du fluide qui lui sont directement opposées; c'est-à-dire, à moins que la vitesse relative avec laquelle le fluide revient frapper le corps par derrière ne soit égale à celle avec laquelle le corps frappe le fluide; ou, ce qui revient au même, à moins que la vitesse absolue du fluide

recurrent ne soit double de celle du fluide repoussé par le corps; ce qui est absolument impossible. On ne peut donc en aucune manière supprimer la résistance des fluides, du moins celle que produisent la densité & l'inertie; d'où il faut conclure que les fluides célestes n'ont aucune force d'inertie puisqu'ils n'opposent aucune résistance; qu'il n'y a pareillement aucune force qui communique le mouvement, puisqu'il n'y a point de force d'inertie; point de force qui puisse produire le plus léger changement dans les corps en général ou en particulier, puisqu'il n'y a point de force qui puisse communiquer le mouvement; en un mot que ces fluides n'ont aucune efficacité, puisqu'ils n'ont aucun moyen de produire le changement. Pourquoi donc ne pas regarder comme ridicule & indigne d'un Philosophe, une hypothèse qui n'a point de fondement & ne peut en aucune manière servir à expliquer les loix & les phénomènes de la nature? Ceux qui veulent que l'univers soit rempli de matière, & en même tems soutiennent que cette matière n'a point de force d'inertie; établissent réellement l'existence du vuide dont ils ne suppriment que le nom; car puisqu'il n'y a aucune manière & aucune raison de distinguer une telle matière du vuide, il est évident que ce n'est plus qu'une dispute de mots. Si malgré tout cela, il y a encore des personnes si fort attachées à la matière qu'elles veuillent croire qu'il n'est pas possible d'admettre un espace absolument vuide de corps, voyons enfin où cette assertion les conduira.

Diront-ils que ce plein dans lequel ils imaginent que l'univers est construit, est un effet de la volonté de Dieu qui a tout disposé de cette manière afin de trouver pour les opérations de la nature une ressource toujours présente dans cette matière subtile qui pénètre & remplit tout; quoique nous ayons déjà prouvé que l'on ne peut avancer cette proposition, puisqu'il est démontré par les phénomènes des Comètes qu'une telle matière ne peut avoir aucune efficacité? Avanceront-ils que Dieu a voulu établir ce plein, pour une fin que nous ne connoissons pas, ce qui seroit une autre absurdité, puisque l'on pourroit prouver par le même raisonnement toute autre disposition & tout autre mécanisme qu'il plairoit d'imaginer pour expliquer le système de l'univers? Oseroient-ils enfin nous assurer que ce plein universel n'est pas dépendant de la volonté de Dieu, mais qu'il doit son existence à une certaine nécessité de la nature? Il faut donc qu'ils retombent dans toutes les impiétés de la plus méprisable de toutes les sectes, de ceux qui sont assez stupides pour croire que tout se fait au hasard, & non par une Providence souverainement intelligente; de ces hommes qui s'imaginent que la matière a toujours existé nécessairement & en tout lieu, qu'elle est infinie & éternelle. Si on leur accorderoit ce principe, il s'en suit aussi de là

qu'elle doit être absolument uniforme & homogène dans toute son étendue ; car la variété des formes est directement opposée à la nécessité de l'existence : elle sera aussi par la même raison immobile ; car si elle se meut nécessairement vers un certain point de l'étendue, avec une certaine vitesse déterminée ; par une égale nécessité elle sera aussi en mouvement vers un autre point de l'étendue avec une vitesse différente ; mais il est évident qu'elle ne peut se mouvoir en même-tems vers différents lieux & avec des vitesses différentes ; elle est donc nécessairement immobile. Donc il n'a pas pu résulter de cette matière un monde aussi beau & aussi admirable que le nôtre, par la variété des formes & des mouvemens ; cet ouvrage ne peut donc être qu'un effet de la volonté souverainement libre d'un Dieu qui prévoit tout & qui gouverne tout.

C'est là qu'il faut chercher la source & l'origine de toutes ces loix que nous appellons *loix de la nature*, dans lesquelles on retrouve à chaque instant les marques sensibles d'une intelligence infinie, sans jamais y découvrir le moindre trait qui puisse nous les faire regarder comme nécessaires. Se flatter de pouvoir découvrir les principes d'une vraie physique & les loix de la nature par la seule force de son génie, en fermant les yeux sur tout ce qui nous environne, pour ne consulter que la lumière d'une raison intérieure ; c'est établir que le monde existe nécessairement, & que les loix dont il s'agit sont des suites immédiates de cette nécessité : ou si l'on est persuadé que cet Univers est l'ouvrage d'un Dieu ; c'est avoir assez d'orgueil pour imaginer qu'un être aussi petit, aussi foible que l'homme, connoît néanmoins avec évidence ce que Dieu pouvoit faire de mieux. Toute Philosophie saine & véritable est uniquement appuyée sur les phénomènes. Si les mêmes phénomènes nous conduisent de gré ou de force à des principes dans lesquels on voit briller évidemment l'intelligence & le pouvoir absolu d'un Etre souverainement sage & puissant ; ce n'est pas une raison de les rejeter, parce qu'ils déplairont à quelques particuliers ; que ce soit pour ces gens-là des miracles ou des qualités occultes, on ne doit point leur imputer les noms que la malice peut leur donner ; à moins qu'on ne veuille nous avouer tout simplement que la philosophie doit être fondée sur l'Athéisme ; mais il ne faut pas altérer & corrompre la Philosophie pour des hommes de cette espèce ; l'ordre de la nature doit être aussi sacré qu'il est immuable.

Les gens de bien & les juges équitables dans cette matière regarderont certainement comme la plus excellente manière de traiter la Philosophie, celle qui est fondée sur les expériences & les observations. Nous ne pouvons exposer ici la gloire & l'éclat que cette nouvelle Philosophie reçoit de l'excellent Ouvrage de notre illustre

Auteur. Rien de plus juste que le respectueux étonnement avec lequel ceux qui ont approfondi ces matières ne cessent d'admirer la force & la grandeur de cet heureux génie occupé à résoudre les problèmes les plus difficiles, & si supérieur à tout ce que l'on pouvoit attendre de l'esprit humain : il a, pour ainsi dire, déchiré le voile de la nature pour nous en découvrir les plus admirables mystères : il a mis sous nos yeux une exposition si élégante du système de l'univers, un ensemble si beau & si parfait, qu'Alphonse * lui-même n'auroit plus rien à désirer ni pour l'harmonie, ni pour la simplicité, si ce prince vivoit encore. Nous pouvons maintenant contempler de plus près la majesté de la nature, jouir plus que jamais d'un spectacle si doux ; adorer & servir avec plus d'ardeur le Maître & le Créateur de toutes choses, & c'est là le plus grand avantage que l'on puisse retirer de la Philosophie. Il faut être aveugle pour ne pas voir dans le meilleur & le plus sage de tous les ouvrages, la sagesse & la bonté infinie de celui qui en est l'auteur ; mais c'est le comble de la folie que de ne vouloir pas le reconnoître.

Ce grand Ouvrage de M. Newton sera donc un solide rempart que les impies & les athées ne pourront jamais renverser ; c'est là qu'il faut chercher des armes si l'on veut les combattre avec succès. Il y a déjà longtemps que cette importante vérité a été reconnue, par un illustre Professeur du Collège de la Trinité, M. Richard Bentley, qui fait à la fois la gloire de son siècle & l'ornement de notre Académie. Ce grand homme aussi recommandable par une vaste érudition que par la protection qu'il accorde à tous les Savants, est aussi le premier qui l'ait démontré avec autant de force que d'élégance dans ses discours académiques, si universellement estimés, & qui ont été publiés en latin & en anglois. Je me fais un plaisir de reconnoître ici combien je lui suis redevable à toutes sortes d'égards, & je ne doute point que le Lecteur ne soit pareillement disposé à lui payer le tribut de l'estime dûe à son sçavoir & à son mérite. Lié depuis long-temps d'une manière intime avec notre illustre Auteur ; & d'ailleurs aussi sensible à cette gloire qu'à celle qu'il reçoit de ses ouvrages, qui sont les délices de toutes les personnes lettrées, il a sçu rendre un service également important au nom de son ami & au progrès des sciences. Les exemplaires de la

* Alphonse roi de Castille vivoit vers le milieu du XIII^e siècle : il donna des sommes prodigieuses pour faire construire de nouvelles tables astronomiques. On rapporte de lui un trait singulier qui revient à cet article. Lorsque les Astronomes qu'il avoit choisis pour faire cet Ouvrage lui présentèrent leur système, qui se trouvoit embarrassé d'une infinité de cercles qu'ils avoient cru nécessaires pour expliquer les différents mouvements des astres : Si Dieu dit ce Prince, m'eus consulté lorsqu'il créa l'Univers, tous auroit été dans un ordre meilleur & plus simple : Ironie adroite qui part moins d'un principe d'impiété, que d'un génie naturellement connoisseur, qui se doutoit bien que le mécanisme de l'Univers devoit être beaucoup plus simple que celui qu'on lui proposoit.

P R É F A C E.

xxxix

dernière édition des Principes étoient devenus très-rares & se vendoient à un prix exorbitant. Il ne cessa de faire les plus vives instances à M. Newton, & détermina enfin cet homme, aussi supérieur aux autres par sa modestie que par son sçavoir, à laisser paroître sous ses auspices & à ses dépens cette nouvelle édition que l'on a revue d'un bout à l'autre, & qui se trouve enrichie de diverses additions importantes que l'on y a faites; enfin c'est par son crédit que je reçus dans le même tems une somme considérable qui me fut donnée, pour veiller à ce que cet Ouvrage fût exécuté avec tout le soin & toute la correction possible.

A Cambridge, le 12 Mai 1713.

R O G E R C O T E S , Affocié du Collège de la Trinité, & Professeur d'Astronomie & de Physique expérimentale.

Avertissement sur les Planches de cet Ouvrage.

COMME on n'a pas voulu multiplier inutilement les Planches & les Figures, lorsque l'on trouvera une même Figure sous deux numéros, on regardera cette Figure comme si c'étoit deux Figures séparées.

Les Planches qui étoient absolument nécessaires dans cet Ouvrage, & d'autres obstacles qu'on ne pouvoit pas prévoir, ont empêché jusqu'ici la publication des *Principes de Newton*, qu'on se proposoit de mettre en vente dès l'année 1756.

E R R A T A.

P RÉFACE de M. CÔTES, *p.* xxiv, avant dernière *lig.* au lieu de cette, lisez *cer*; & au lieu de *vraiment*, lisez *vraiment*.

Préface de M. Newton, *p.* xvij, *lig.* 8, oppositions; lisez propositions.

Préface de M. Newton à la troisième édition, *p.* xx, *lig.* 2, Camberton; lisez Pemberton.

I^{er} Volume, *p.* 38, Lemme 2^e cotez en marge, Fig. 6.

Page 39, Lemme 4^e cotez en marge, Fig. 7 & 8.

Page 40, Lemme 6^e cotez en marge, Fig. 9.

Page 94, *lig.* 3, le point coïncide; lisez le point M. coïncide.

Ibidem, *ligne* 22, la droite *trp.* lisez la droite *tr.*

Page 293, à la marge, Fig. 29; lisez Fig. 26.

Page 297, à la marge, *ligne* 12, Fig. 27; lisez Fig. 28.

II^e Volume, page 35, vers le bas, mettez Figure 1^{re} à la marge.

Commentaire, page 161, *ligne* 12; je fais les lignes A P, lisez A S;

Page 164, *ligne* 4, de la Sphere P S, lisez P Q.

Ibidem, au bas de la page, Fig. 6; lisez Fig. 7.

Page 198, vers le bas de la page; le canal A B, lisez le canal K L;

Page 212, *ligne* 10, les particules *s*, lisez les particules S.

Page 219, vers le bas de la page, ou à, lisez on a.

Page 237, *ligne* 14, on aura par le rapport $\frac{\frac{2}{15} c e d}{\frac{2}{3} c e + \frac{8}{15} c e d}$

Lisez on aura pour le rapport $\frac{\frac{2}{15} c e d}{\frac{2}{3} c e + \frac{6}{15} c e d}$

Page 283, vers le haut de la page, mettez à la marge Fig. 4.

SUR LA PHYSIQUE.

SUR LA PHYSIQUE DE NEWTON *

A M A D A M E

LA MARQUISE DU CHASTELET.

TU m'appelles à toi, vaste & puissant génie,
Minerve de la France, immortelle Emilie.
Je m'éveille à ta voix, je marche à ta clarté,
Sur les pas des vertus & de la vérité.
Je quitte *Melpomène* & les jeux du Théâtre,
Ces combats, ces lauriers, dont je fus idolâtre.
De ces triomphes vains mon cœur n'est plus touché.
Que le jaloux *Rufus*, à la terre attaché;
Traîne au bord du tombeau la fureur insensée
D'enfermer dans un vers une fausse pensée;
Qu'il arme contre moi ses languissantes mains,
Des traits qu'il destinoit au reste des humains;
Que quatre fois par mois un ignorant *Zoïle*
Elève en frémissant une voix imbécille;
Je n'entends point leurs cris que la haine a formés.
Je ne vois point leurs pas dans la fange imprimés.
Le charme tout-puissant de la Philosophie,
Elève un esprit sage au-dessus de l'envie.
Tranquille au haut des cieux, que *Newton* s'est soumis,
Il ignore en effet s'il a des ennemis.
Je ne les connois plus. Déjà de la carrière
L'auguste vérité vient m'ouvrir la barrière;

* Cette Lettre est imprimée au-devant des *Elémens* de *Newton*, donnés au Public par M. de Voltaire en 1738 & 1742.

Déjà ces tourbillons , l'un par l'autre pressés ,
Se mouvant sans espace , & sans règles entassés ,
Ces fantômes sçavans à mes yeux dispaçoissent.
Un jour plus pur me luit ; les mouvemens renaissent ;
L'espace , qui de Dieu contient l'immensité ,
Voit rouler dans son sein l'Univers limité ,
Cet Univers si vaste à notre foible vûe ,
Et qui n'est qu'un atôme , un point dans l'étendue.

Dieu parle , & le cahos se dissipe à sa voix.
Vers un centre commun tout gravite à la fois.
Ce ressort si puissant , l'ame de la nature ,
Etoit enseveli dans une nuit obscure.

Le compas de *Newton* , mesurant l'Univers ,
Leve enfin ce grand voile , & les Cieux sont ouverts.

Il découvre à mes yeux , par une main sçavante ,
De l'astre des faisons la robe étincelante ;
L'émeraude , l'azur , le pourpre , le rubis ,
Sont l'immortel tissu dont brillent ses habits.
Chacun de ses raïons dans sa substance pure ,
Porte en soi les couleurs dont se peint la nature ,
Et confondus ensemble ils éclairent nos yeux ,
Ils animent le monde , ils emplissent les Cieux.

Confidens du Très-haut , substances éternelles ,
Qui brûlez de ses feux , qui couvrez de vos aïles
Le Trône où votre Maître est assis parmi vous ,
Parlez ; du grand *Newton* n'étiez-vous point jaloux ?

La mer entend sa voix. Je vois l'humide empire
S'élever , s'avancer vers le Ciel qui l'attire :
Mais un pouvoir central arrête ses efforts ;
La mer tombe , s'affaïsse , & roule vers ses bords.

Comètes, que l'on craint à l'égal du tonnerre ,
Cessez d'épouvanter les peuples de la terre ;
Dans une ellipse immense achevez votre cours ;
Remontez, descendez près de l'astre des jours ;
Lancez vos feux, volez ; & revenant sans cesse ,
Des mondes épuisés ranimez la vieillesse.

Et toi, sœur du soleil, astre qui dans les Cieux
Des sages éblouis trompois les faibles yeux ,
Newton de ta carrière a marqué les limites :
Marche, éclaire les nuits, tes bornes sont prescrites.

Terre, change de forme, & que la pesanteur ,
En abaissant le Pôle, élève l'Equateur.
Pôle, immobile aux yeux, si lent dans votre course ,
Fuyez le char glacé des sept Astres de l'Ourse : *
Embrassez dans le cours de vos longs mouvemens
Deux cens siècles entiers par de-là six mille ans.

Que ces objets sont beaux ! Que notre ame épurée
Vole à ces vérités dont elle est éclairée !
Oui, dans le sein de Dieu, loin de ce corps mortel ,
L'esprit semble écouter la voix de l'Eternel.

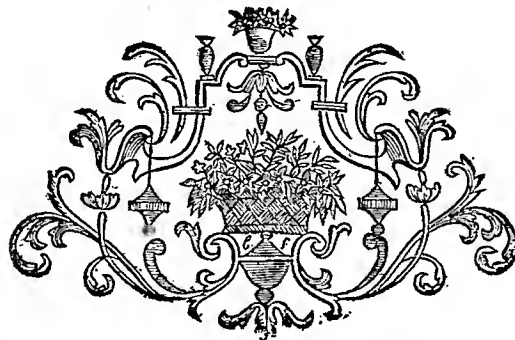
Vous, à qui cette voix se fait si bien entendre ,
Comment avez-vous pu, dans un âge encor tendre ,
Malgré les vains plaisirs, ces écueils des beaux jours ,
Prendre un vol si hardi, suivre un si vaste cours ,
Marcher après *Newton* dans cette route obscure
Du labyrinthe immense où se perd la nature ?
Puisse-je auprès de vous, dans ce Temple écarté ,
Aux regards des François montrer la Vérité ,

* C'est la Période de la pression des Equinoxes, laquelle s'accomplit en vingt-six mille neuf cens ans, ou environ.

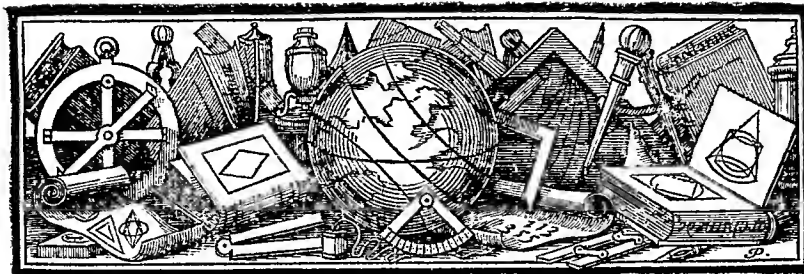
Tandis * qu'Algaroti, sûr d'instruire & de plaire,
Vers le Tibre étonné conduit cette Etrangère.

Que de nouvelles fleurs il orne ses attraits,
Le compas à la main j'en tracerai les traits;
De mes crayons grossiers je peindrai l'immortelle;
Cherchant à l'embellir, je la rendrais moins belle.
Elle est, ainsi que vous, noble, simple & sans fard,
Au-dessus de l'éloge, au-dessus de mon art.

* M. Algaroti, jeune Vénitien, faisoit imprimer alors à Venise un *Traité sur la Lumière*, dans lequel il expliquoit l'Attraction. Il y a eu sept éditions de son Livre, lequel a été fort mal traduit en françois.



PRINCIPES



PRINCIPES
MATHÉMATIQUES
DE LA
PHILOSOPHIE NATURELLE.

DÉFINITIONS.

DÉFINITION PREMIÈRE.

La quantité de matière se mesure par la densité & le volume pris ensemble.



AIR devenant d'une densité double est quadruple en quantité, lorsque l'espace est double, & sextuple, si l'espace est triple. On en peut dire autant de la neige & de la poudre condensées par la liquéfaction ou la compression, aussi-bien que dans tous les corps condensés par quelque cause que ce puisse être.

Je ne fais point attention ici au milieu qui passe librement entre les parties des corps, supposé qu'un tel milieu existe. Je désigne

DÉFINITIONS.

la quantité de matière par les mots de *corps* ou de *masse*. Cette quantité se connoît par le poids des corps : car j'ai trouvé par des expériences très-exactes sur les pendules, que les poids des corps sont proportionnels à leur masse ; je rapporterai ces expériences dans la suite.

D É F I N I T I O N I I.

La quantité de mouvement est le produit de la masse par la vitesse.

Le mouvement total est la somme du mouvement de chacune des parties ; ainsi la quantité du mouvement est double dans un corps dont la masse est double, si la vitesse reste la même ; mais si on double la vitesse, la quantité du mouvement sera quadruple.

D É F I N I T I O N I I I.

La force qui réside dans la matière (vis insita) est le pouvoir qu'elle a de résister. C'est par cette force que tout corps persévère de lui-même dans son état actuel de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite.

Cette force est toujours proportionnelle à la quantité de matière des corps, & elle ne diffère de ce qu'on appelle *l'inertie de la matière*, que par la manière de la concevoir : car l'inertie est ce qui fait qu'on ne peut changer sans effort l'état actuel d'un corps ; soit qu'il se meuve, soit qu'il soit en repos ; ainsi on peut donner à la force qui réside dans les corps le nom très-expressif de *force d'inertie*.

Le corps exerce cette force toutes les fois qu'il s'agit de changer son état actuel, & on peut la considérer alors sous deux différents aspects, ou comme *résistante*, ou comme *impulsive* : comme résistante, en tant que le corps s'oppose à la force qui tend à lui faire changer d'état ; comme impulsive, en tant que le même corps fait effort pour changer l'état de l'obstacle qui lui résiste.

On attribue communément la résistance aux corps en repos, & la force impulsive à ceux qui se meuvent ; mais le mouvement

& le repos, tels qu'on les conçoit communément, ne sont que respectifs : car les corps qu'on croit en repos ne sont pas toujours dans un repos absolu.

DÉFINITIONS.

D É F I N I T I O N I V.

La force imprimée (vis impressa) est l'action par laquelle l'état du corps est changé, soit que cet état soit le repos, ou le mouvement uniforme en ligne droite.

Cette force consiste uniquement dans l'action, & elle ne subsiste plus dans le corps, dès que l'action vient à cesser. Mais le corps persévère par la seule force d'inertie dans le nouvel état dans lequel il se trouve. La force imprimée peut avoir diverses origines, elle peut être produite par le *choc*, par la *pression*, & par la *force centripète*.

D É F I N I T I O N V.

La force centripète est celle qui fait tendre les corps vers quelque point, comme vers un centre, soit qu'ils soient tirés ou poussés vers ce point, ou qu'ils y tendent d'une façon quelconque.

La gravité qui fait tendre tous les corps vers le centre de la terre ; la force magnétique qui fait tendre le fer vers l'aimant, & la force, quelle qu'elle soit, qui retire à tout moment les planètes du mouvement rectiligne, & qui les fait circuler dans des courbes, sont des forces de ce genre.

La pierre qu'on fait tourner par le moyen d'une fronde, agit sur la main, en tendant la fronde, par un effort qui est d'autant plus grand, qu'on la fait tourner plus vite, & elle s'échappe aussitôt qu'on ne la retient plus. La force exercée par la main pour retenir la pierre, laquelle est égale & contraire à la force par laquelle la pierre tend la fronde, étant donc toujours dirigée vers la main, centre du cercle décrit, est celle que j'appelle *force centripète*. Il en est de même de tous les corps qui se meuvent en rond, ils font tous effort pour s'éloigner du centre de leur révo-

lution ; & sans le secours de quelque force qui s'oppose à cet effort & qui les retient dans leurs orbes, c'est-à-dire, de quelque *force centripète*, ils s'en iroient en ligne droite d'un mouvement uniforme.

Un projectile ne retomberoit point vers la terre, s'il n'étoit point animé par la force de la gravité, mais il s'en iroit en ligne droite dans les cieus avec un mouvement uniforme, si la résistance de l'air étoit nulle. C'est donc par la gravité qu'il est retiré de la ligne droite, & qu'il s'infléchit sans cesse vers la terre ; & il s'infléchit plus ou moins, selon la gravité & la vitesse de son mouvement. Moins la gravité du projectile sera grande par rapport à la quantité de matière, plus il aura de vitesse ; moins il s'éloignera de la ligne droite, & plus il ira loin avant de retomber sur la terre.

Ainsi, si un boulet de canon étoit tiré horizontalement du haut d'une montagne, avec une vitesse capable de lui faire parcourir un espace de deux lieues avant de retomber sur la terre : avec une vitesse double, il n'y retomberoit qu'après avoir parcouru à peu près quatre lieues, & avec une vitesse décuple, il iroit dix fois plus loin ; (pourvu qu'on n'ait point d'égard à la résistance de l'air,) & en augmentant la vitesse de ce corps, on augmenteroit à volonté le chemin qu'il parcoureroit avant de retomber sur la terre, & on diminueroit la courbure de la ligne qu'il décriroit ; en sorte qu'il pourroit ne retomber sur la terre qu'à la distance de 10, de 30, ou de 90 degrés ; ou qu'enfin il pourroit circuler autour, sans y retomber jamais, & même s'en aller en ligne droite à l'infini dans le ciel.

Or, par la même raison qu'un projectile pourroit tourner autour de la terre par la force de la gravité, il se peut faire que la lune par la force de la gravité, (supposé qu'elle grave) ou par quelque autre force qui la porte vers la terre, soit détournée à tout moment de la ligne droite pour s'approcher de la terre, & qu'elle soit contrainte à circuler dans une courbe, & sans une telle force, la lune ne pourroit être retenue dans son orbite.

Si cette force étoit moindre qu'il ne convient, elle ne retireroit pas assez la lune de la ligne droite; & si elle étoit plus grande, elle l'en retireroit trop, & elle la tireroit de son orbe vers la terre. La quantité de cette force doit donc être donnée; & c'est aux Mathématiciens à trouver la force centripète nécessaire pour faire circuler un corps dans un orbite donné, & à déterminer réciproquement la courbe dans laquelle un corps doit circuler par une force centripète donnée, en partant d'un lieu quelconque donné, avec une vitesse donnée.

La quantité de la force centripète peut être considérée comme *absolue, accélératrice & motrice.*

D É F I N I T I O N VI.

La quantité absolue de la force centripète est plus grande ou moindre, selon l'efficacité de la cause qui la propage du centre.

C'est ainsi que la force magnétique est plus grande dans un aimant que dans un autre, suivant la grandeur de la pierre, & l'intensité de sa vertu.

D É F I N I T I O N VII.

La quantité accélératrice de la force centripète est proportionnelle à la vitesse qu'elle produit dans un temps donné.

La force magnétique du même aimant est plus grande à une moindre distance, qu'à une plus grande. La force de la gravité est plus grande dans les plaines, & moindre sur le sommet des hautes montagnes, & doit être encore moindre (comme on le prouvera dans la suite) à de plus grandes distances de la terre, & à des distances égales, elle est la même de tous côtés; c'est pourquoi elle accélère également tous les corps qui tombent, soit qu'ils soient légers ou pesans, grands ou petits, abstraction faite de la résistance de l'air.

La quantité motrice de la force centripète est proportionnelle au mouvement qu'elle produit dans un temps donné.

Le poids des corps est d'autant plus grand, qu'ils ont plus de masse; & le même corps pèse plus près de la surface de la terre, que s'il étoit transporté dans le ciel. La quantité motrice de la force centripète est la force totale avec laquelle le corps tend vers le centre, & proprement son poids; & on peut toujours la connoître en connoissant la force contraire & égale qui peut empêcher le corps de descendre.

J'ai appelé ces différentes quantités de la force centripète, *motrices*, *accélératrices*, & *absolues*, afin d'être plus court.

On peut, pour les distinguer, les rapporter *aux corps* qui sont attirés vers un centre, *aux lieux* de ces corps, & *au centre* des forces.

On peut rapporter la force centripète motrice au corps, en la considérant comme l'effort que fait le corps entier pour s'approcher du centre, lequel effort est composé de celui de toutes les parties.

La force centripète accélératrice peut se rapporter au lieu du corps, en considérant cette force en tant qu'elle se répand du centre dans tous les lieux qui l'environnent, pour mouvoir les corps qui s'y rencontrent.

Enfin on rapporte la force centripète absolue au centre, comme à une certaine cause sans laquelle les forces motrices ne se propageroient point dans tous les lieux qui entourent le centre; soit que cette cause soit un corps central quelconque, (comme l'aimant dans le centre de la force magnétique, & la terre dans le centre de la force gravitante,) soit que ce soit quelque autre cause qu'on n'apperçoit pas. Cette façon de considérer la force centripète est purement mathématique: & je ne prétends point en donner la cause physique.

La force centripete accélératrice est donc à la force centripete motrice, ce que la vitesse est au mouvement ; car de même que la quantité de mouvement est le produit de la masse par la vitesse, la quantité de la force centripete motrice est le produit de la force centripete accélératrice par la masse ; car la somme de toutes les actions de la force centripete accélératrice sur chaque particule du corps est la force centripete motrice du corps entier. Donc à la surface de la terre où la force accélératrice de la gravité est la même sur tous les corps, la gravité motrice ou le poids des corps est proportionnel à leur masse ; & si on étoit placé dans des régions où la force accélératrice diminuât, le poids des corps y diminueroit pareillement ; ainsi il est toujours comme le produit de la masse par la force centripete accélératrice. Dans les régions où la force centripete accélératrice seroit deux fois moindre, le poids d'un corps soudouble ou foustriple seroit quatre fois ou six fois moindre.

Au reste, je prens ici dans le même sens les attractions & les impulsions accélératrices & motrices, & je me sers indifféremment des mots d'*impulsion*, d'*attraction*, ou de *propension* quelconque vers un centre : car je considère ces forces mathématiquement & non physiquement ; ainsi le Lecteur doit bien se garder de croire que j'aie voulu désigner par ces mots une espèce d'action, de cause ou de raison physique ; & lorsque je dis que les centres attirent, lorsque je parle de leurs forces, il ne doit pas penser que j'aie voulu attribuer aucune force réelle à ces centres que je considère comme des points mathématiques.

S C H O L I E.

Je viens de faire voir le sens que je donne dans cet Ouvrage à des termes qui ne sont pas communément usités. Quant à ceux de *temps*, d'*espace*, de *lieu* & de *mouvement*, ils sont connus de tout le monde ; mais il faut remarquer que pour n'avoir considéré ces quantités que par leurs relations à des choses sensibles, on est tombé dans plusieurs erreurs.

DÉFINITIONS. Pour les éviter, il faut distinguer le temps, l'espace, le lieu, & le mouvement, en *absolus & relatifs, vrais & apparens, mathématiques & vulgaires.*

I. Le temps absolu, vrai & mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément, & s'appelle *durée*. Le temps relatif, apparent & vulgaire, est cette mesure sensible & externe d'une partie de durée quelconque (égale ou inégale) prise du mouvement : telles sont les mesures d'*heures*, de *jours*, de *mois*, &c. dont on se sert ordinairement à la place du temps vrai.

II. L'espace absolu, sans relation aux choses externes, demeure toujours similaire & immobile.

L'espace relatif est cette mesure ou dimension mobile de l'espace absolu, laquelle tombe sous nos sens par sa relation aux corps, & que le vulgaire confond avec l'espace immobile. C'est ainsi, par exemple, qu'un espace, pris au dedans de la terre ou dans le ciel, est déterminé par la situation qu'il a à l'égard de la terre.

L'espace absolu & l'espace relatif sont les mêmes d'espèce & de grandeur ; mais ils ne le sont pas toujours de nombre ; car, par exemple, lorsque la terre change de place dans l'espace, l'espace qui contient notre air demeure le même par rapport à la terre, quoique l'air occupe nécessairement les différentes parties de l'espace dans lesquelles il passe, & qu'il en change réellement sans cesse.

III. Le lieu est la partie de l'espace occupée par un corps, & par rapport à l'espace, il est ou relatif ou absolu.

Je dis que le lieu est une partie de l'espace, & non pas simplement la situation du corps, ou la superficie qui l'entoure : car les solides égaux ont toujours des lieux égaux, quoique leurs superficies soient souvent inégales, à cause de la dissemblance de leurs formes ; les situations, à parler exactement, n'ont point de quantité, ce sont plutôt des affections des lieux, que des lieux proprement dits.

De même que le mouvement ou la translation du tout hors de

son lieu est la somme des mouvemens ou des translations des parties hors du leur ; ainsi le lieu du tout est la somme des lieux de toutes les parties , & ce lieu doit être interne , & être dans tout le corps entier (*& propterea internus & in corpore toto.*)

DÉFINITIONS.

IV. Le mouvement absolu est la translation des corps d'un lieu absolu dans un autre lieu absolu , & le mouvement relatif est la translation d'un lieu relatif dans un autre lieu relatif ; ainsi dans un vaisseau poussé par le vent , le lieu relatif d'un corps est la partie du vaisseau dans laquelle ce corps se trouve, ou l'espace qu'il occupe dans la cavité du vaisseau ; & cet espace se meut avec le vaisseau ; & le repos relatif de ce corps est la permanence dans la même partie de la cavité du vaisseau. Mais le repos vrai du corps est la permanence dans la partie de l'espace immobile , où l'on suppose que se meut le vaisseau & tout ce qu'il contient. Ainsi , si la terre étoit en repos , le corps qui est dans un repos relatif dans le Vaisseau auroit un mouvement vrai & absolu , dont la vitesse seroit égale à celle qui emporte le vaisseau sur la surface de la terre ; mais la terre se mouvant dans l'espace , le mouvement vrai & absolu de ce corps est composé du mouvement vrai de la terre dans l'espace immobile , & du mouvement relatif du vaisseau sur la surface de la terre ; & si le corps avoit un mouvement relatif dans le vaisseau , son mouvement vrai & absolu seroit composé de son mouvement relatif dans le vaisseau , du mouvement relatif du vaisseau sur la terre , & du mouvement vrai de la terre dans l'espace absolu. Quant au mouvement relatif de ce corps sur la terre , il seroit formé dans ce cas de son mouvement relatif dans le vaisseau , & du mouvement relatif du vaisseau sur la terre. En sorte que si la partie de la terre où se trouve ce vaisseau avoit un mouvement vrai vers l'orient , avec une vitesse divisée en 10010 parties : que le vaisseau fût emporté vers l'occident avec 10 parties de cette vitesse ; & que le Pilote se promenât dans le vaisseau vers l'orient , avec une partie de cette même vitesse : ce Pilote auroit un mouvement réel & absolu dans l'espace im-

DÉFINITIONS.

mobile, avec 10001 parties de vitesse vers l'orient, & un mouvement relatif sur la terre vers l'occident avec 9 parties de vitesse.

On distingue en astronomie le temps absolu du temps relatif par l'*équation du temps*. Car les jours naturels sont inégaux, quoiqu'on les prenne communément pour une mesure égale du temps; & les Astronomes corrigent cette inégalité, afin de mesurer les mouvemens célestes par un temps plus exact.

Il est très possible qu'il n'y ait point de mouvement parfaitement égal, qui puisse servir de mesure exacte du temps; car tous les mouvemens peuvent être accélérés & retardés, mais le temps absolu doit toujours couler de la même manière.

La durée ou la persévérance des choses est donc la même, soit que les mouvemens soient prompts, soit qu'ils soient lents, & elle seroit encore la même, quand il n'y auroit aucun mouvement; ainsi il faut bien distinguer le temps de ses mesures sensibles, & c'est ce qu'on fait par l'équation astronomique. La nécessité de cette équation dans la détermination des Phénomènes se prouve assez par l'expérience des horloges à pendule, & par les observations des Eclipses des satellites de Jupiter.

L'ordre des parties de l'espace est aussi immuable que celui des parties du temps; car si les parties de l'espace sortoient de leur lieu, ce seroit, si l'on peut s'exprimer ainsi, sortir d'elles-mêmes. Les temps & les espaces n'ont pas d'autres lieux qu'eux-mêmes, & ils sont les lieux de toutes les choses. Tout est dans le temps, quant à l'ordre de la succession: tout est dans l'espace, quant à l'ordre de la situation. C'est là ce qui détermine leur essence, & il seroit absurde que les lieux primordiaux se mûssent. Ces lieux sont donc les lieux absolus, & la seule translation de ces lieux fait les mouvemens absolus.

Comme les parties de l'espace ne peuvent être vûes ni distinguées les unes des autres par nos sens, nous y suppléons par des mesures sensibles. Ainsi nous déterminons les lieux par les posi-

tions & les distances à quelque corps que nous regardons comme immobile, & nous mesurons ensuite les mouvemens des corps par rapport à ces lieux ainsi déterminés : nous nous servons donc des lieux & des mouvemens relatifs à la place des lieux & des mouvemens absolus ; & il est à propos d'en user ainsi dans la vie civile ; mais dans les matieres philosophiques , il faut faire abstraction des sens ; car il se peut faire qu'il n'y ait aucun corps véritablement en repos , auquel on puisse rapporter les lieux & les mouvemens.

DÉFINITIONS

Le repos & le mouvement relatifs & absolus sont distingués par leurs *propriétés* , leurs *causes* & leurs *effets*. La propriété du repos est que les corps véritablement en repos y sont les uns à l'égard des autres. Ainsi, quoiqu'il soit possible qu'il y ait quelque corps dans la région des fixes, ou beaucoup au-delà , qui soit dans un repos absolu, comme on ne peut pas connoître par la situation qu'ont entr'eux les corps d'ici-bas, si quelqu'un de ces corps conserve ou non sa situation par rapport à ce corps éloigné , on ne sçauroit déterminer , par le moyen de la situation que ces corps ont entr'eux , s'ils sont véritablement en repos.

La propriété du mouvement est que les parties qui conservent des positions données par rapport aux tous participent aux mouvemens de ces tous ; car si un corps se meut autour d'un axe , toutes ses parties font effort pour s'éloigner de cet axe, & s'il a un mouvement progressif, son mouvement total est la somme des mouvemens de toutes ses parties. De cette propriété il suit, que si un corps se meut, les corps qu'il contient, & qui sont par rapport à lui dans un repos relatif, se meuvent aussi ; & par conséquent le mouvement vrai & absolu ne sçauroit être défini par la translation du voisinage des corps extérieurs , que l'on considère comme en repos. Il faut que les corps extérieurs soient non seulement regardés comme en repos, mais qu'ils y soient véritablement : autrement les corps qu'ils renferment, outre leur transla-

 DÉFINITIONS.

tion du voisinage des ambians, participeront encore au mouvement vrai des ambians, & s'ils ne changeoient point de position par rapport aux parties des ambians, ils ne seroient pas pour cela véritablement en repos ; mais ils seroient seulement considérés comme en repos. Les corps ambians sont à ceux qu'ils contiennent, comme toutes les parties extérieures d'un corps sont à toutes les parties intérieures, ou comme l'écorce est au noyau. Or l'écorce étant muë, le noyau se meut aussi, quoiqu'il ne change point sa situation par rapport aux parties de l'écorce qui l'environnent.

Il suit de cette propriété du mouvement qu'un lieu étant mué, tout ce qu'il contient se meut aussi, & par conséquent qu'un corps qui se meut dans un lieu mobile, participe au mouvement de ce lieu. Tous les mouvemens qui s'exécutent dans des lieux mobiles ne sont donc que les parties des mouvemens entiers & absolus. Le mouvement entier & absolu d'un corps est composé du mouvement de ce corps dans le lieu où l'on le suppose, du mouvement de ce lieu dans le lieu où il est placé lui-même, & ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on arrive à un lieu immobile, comme dans l'exemple du Pilote dont on a parlé ci-dessus. Ainsi les mouvemens entiers & absolus ne peuvent se déterminer qu'en les considérant dans un lieu immobile : & c'est pourquoi j'ai rapporté ci-dessus les mouvemens absolus à un lieu immobile, & les mouvemens relatifs à un lieu mobile. Il n'y a de lieux immobiles que ceux qui conservent à l'infini dans tous les sens leurs situations respectives ; & ce sont ces lieux qui constituent l'espace que j'appelle *immobile*.

Les causes par lesquelles on peut distinguer le mouvement vrai du mouvement relatif sont les forces imprimées dans les corps pour leur donner le mouvement : car le mouvement vrai d'un corps ne peut être produit ni changé que par des forces imprimées à ce corps même ; au lieu que son mouvement relatif peut être produit & changé, sans qu'il éprouve l'action d'au-

cune force : il suffit qu'il y ait des forces qui agissent sur les corps par rapport auxquels on le considère, puisque ces corps étant mûs, la relation dans laquelle consiste le repos ou le mouvement relatif change, de même, le mouvement absolu d'un corps peut changer, sans que son mouvement relatif change ; car si les forces qui agissent sur ce corps agissoient en même temps sur ceux par rapport auxquels on le considère, & en telle sorte que les relations restassent toujours les mêmes, le mouvement relatif, qui n'est autre chose que ces relations, ne changeroit point. Ainsi le mouvement relatif peut changer, tandis que le mouvement vrai & absolu reste le même, & il peut se conserver aussi, quoique le mouvement absolu change ; il est donc sûr que le mouvement absolu ne consiste point dans ces sortes de relations.

DEFINITIONS.

Les effets par lesquels on peut distinguer le mouvement absolu du mouvement relatif, sont les forces qu'ont les corps qui tournent pour s'éloigner de l'axe de leur mouvement ; car dans le mouvement circulaire purement relatif, ces forces sont nulles, & dans le mouvement circulaire vrai & absolu elles sont plus ou moins grandes, selon la quantité du mouvement.

Si on fait tourner en rond un vase attaché à une corde jusqu'à ce que la corde, à force d'être torse, devienne en quelque sorte inflexible ; si on met ensuite de l'eau dans ce vase, & qu'après avoir laissé prendre à l'eau & au vase l'état de repos, on donne à la corde la liberté de se détortiller, le vase acquérera par ce moyen un mouvement qui se conservera très long temps : au commencement de ce mouvement la superficie de l'eau contenue dans le vase restera plane, ainsi qu'elle l'étoit avant que la corde se détortillât ; mais ensuite le mouvement du vase se communiquant peu à peu à l'eau qu'il contient, cette eau commencera à tourner, à s'élever vers les bords, & à devenir concave, comme je l'ai éprouvé, & son mouvement s'augmentant, les bords de cette eau s'élèveront de plus en plus, jusqu'à ce que ses révolutions s'achevant dans des temps égaux à ceux dans lesquels le vase fait un tour entier, l'eau

DÉFINITIONS.

sera dans un repos relatif par rapport à ce vase. L'ascension de l'eau vers les bords du vase marque l'effort qu'elle fait pour s'éloigner du centre de son mouvement, & on peut connoître & mesurer par cet effort le mouvement circulaire vrai & absolu de cette eau, lequel est entièrement contraire à son mouvement relatif; car dans le commencement où le mouvement relatif de l'eau dans le vase étoit le plus grand, ce mouvement n'excitoit en elle aucun effort pour s'éloigner de l'axe de son mouvement: l'eau ne s'élevoit point vers les bords du vase, mais elle demeurait plane, & par conséquent elle n'avoit pas encore de mouvement circulaire vrai & absolu: lorsqu'ensuite le mouvement relatif de l'eau vint à diminuer, l'ascension de l'eau vers les bords du vase marquoit l'effort qu'elle faisoit pour s'éloigner de l'axe de son mouvement; & cet effort, qui alloit toujours en augmentant, indiquoit l'augmentation de son mouvement circulaire vrai. Enfin ce mouvement vrai fut le plus grand, lorsque l'eau fut dans un repos relatif dans le vase. L'effort que faisoit l'eau pour s'éloigner de l'axe de son mouvement, ne dépendoit donc point de sa translation du voisinage des corps ambians, & par conséquent le mouvement circulaire vrai ne peut se déterminer par de telles translations.

Le mouvement vrai circulaire de tout corps qui tourne est unique, & il répond à un seul effort qui est sa mesure naturelle & exacte; mais les mouvemens relatifs sont variés à l'infini; selon toutes les relations aux corps extérieurs; & tous ces mouvemens, qui ne sont que des relations, n'ont aucun effet réel, qu'en tant qu'ils participent du mouvement vrai & unique. De-là il suit que dans le système de ceux qui prétendent que nos cieux tournent au-dessous des cieux des Etoiles fixes, & qu'ils emportent les Planètes par leurs mouvemens: toutes les parties des cieux, & les Planètes qui sont en repos par rapport aux cieux qui les environnent se meuvent réellement; car elles changent leur position entre elles (au contraire de ce qui arrive aux corps qui sont dans un

repos absolu) & étant transportées avec les cieux qui les entourent, elles font effort, ainsi que les parties des tous qui tournent, pour s'éloigner de l'axe du mouvement.

DÉFINITION.

Les quantités relatives ne sont donc pas les véritables quantités dont elles portent le nom, mais ce sont les mesures sensibles, (exactes ou non exactes) que l'on emploie ordinairement pour les mesurer. Or comme la signification des mots doit répondre à l'usage qu'on en fait, on auroit tort si on entendoit par les mots de *temps*, d'*espace*, de *lieu* & de *mouvement*, autre chose que les mesures sensibles de ces quantités, excepté dans le langage purement mathématique. Lorsqu'on trouve donc ces termes dans l'Écriture, ce seroit faire violence au texte sacré, si au lieu de les prendre pour les quantités qui leur servent de mesures sensibles, on les prenoit pour les véritables quantités absolues, ce seroit de même aller contre le but de la Philosophie & des Mathématiques, de confondre ces mêmes mesures sensibles ou quantités relatives avec les quantités absolues qu'elles mesurent.

Il faut avouer qu'il est très difficile de connoître les mouvemens vrais de chaque corps, & de les distinguer actuellement des mouvemens apparens, parce que les parties de l'espace immobile dans lesquelles s'exécutent les mouvemens vrais, ne tombent pas sous nos sens. Cependant il ne faut pas en désespérer entièrement; car on peut se servir, pour y parvenir, tant des mouvemens apparens, qui sont les différences des mouvemens vrais, que des forces qui sont les causes & les effets des mouvemens vrais. Si, par exemple, deux globes attachés l'un à l'autre par le moyen d'un fil de longueur donnée viennent à tourner autour de leur centre commun de gravité, la tension du fil fera connoître l'effort qu'ils font pour s'écarter du centre du mouvement, & donnera par ce moyen la quantité du mouvement circulaire. Ensuite, si en frappant ces deux globes en même-temps, dans des sens opposés, & avec des forces égales, on augmente ou on diminue le mouvement circulaire, on connoîtra par l'augmen-

DÉFINITIONS.

tation ou la diminution de la tension du fil, l'augmentation ou la diminution du mouvement; & enfin on trouvera par ce moyen les côtés de ces globes où les forces doivent être imprimées pour augmenter le plus qu'il est possible le mouvement, c'est-à-dire, les côtés qui se meuvent parallèlement au fil, & qui suivent son mouvement; connoissant donc ces côtés & leurs opposés qui précèdent le mouvement du fil, on aura la détermination du mouvement.

On parviendroit de même à connoître la quantité & la détermination de ce mouvement circulaire dans un vuide quelconque immense, où il n'y auroit rien d'extérieur ni de sensible à quoi on pût rapporter le mouvement de ces globes.

Si dans cet espace il se trouvoit quelques autres corps très-éloignés qui conservassent toujours entr'eux une position donnée, tels que sont les étoiles fixes, on ne pourroit sçavoir par la translation relative des globes, par rapport à ces corps, s'il faudroit attribuer le mouvement aux globes, ou s'il le faudroit supposer dans ces corps; mais si en faisant attention au fil qui joint les globes, on trouvoit sa tension telle que le mouvement des globes le requiert; alors non-seulement on verroit avec certitude que ce sont les globes qui se meuvent, & que les autres corps sont en repos; mais on auroit la détermination du mouvement de ces globes par leurs translations relatives à l'égard des corps.

On fera voir plus amplement dans la suite comment les mouvemens vrais peuvent se connoître par leurs causes, leurs effets, & leurs différences apparentes, & comment on peut connoître au contraire par les mouvemens vrais ou apparens leurs causes & leurs effets, & c'est principalement dans cette vûe qu'on a composé cet Ouvrage.



A X I O M E S,

O U

L O I X D U M O U V E M E N T.

P R E M I E R E L O I.

Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve , à moins que quelque force n'agisse sur lui , & ne le contraigne à changer d'état.

LE s projectiles par eux-mêmes persévérent dans leurs mouvemens, mais la résistance de l'air les retarde, & la force de la gravité les porte vers la terre. Une toupie, dont les parties se détournent continuellement les unes les autres de la ligne droite par leur cohérence réciproque, ne cesse de tourner, que parce que la résistance de l'air la retarde peu à peu. Les planètes & les comètes qui sont de plus grandes masses, & qui se meuvent dans des espaces moins résistans, conservent plus long-temps leurs mouvemens progressifs & circulaires.

A X I O M E S ,
O U L O I X
D U
M O U V E M E N T.

I I. L O I.

Les changemens qui arrivent dans le mouvement sont proportionnels à la force motrice , & se font dans la ligne droite dans laquelle cette force a été imprimée.

Si une force produit un mouvement quelconque, une force double de cette première produira un mouvement double, & une force triple un mouvement triple, soit qu'elle ait été imprimée en un seul coup, soit qu'elle l'ait été peu à peu & successivement, & ce mouvement, étant toujours déterminé du même côté que la force génératrice, fera ajouté au mouvement que le corps est

supposé avoir déjà, s'il conspire avec lui ; ou en fera retranché, s'il lui est contraire, ou bien fera retranché ou ajouté en partie, s'il lui est oblique ; & [de ces deux mouvemens il s'en formera un seul, dont la détermination sera composée des deux premières.

III. LOI.

L'action est toujours égale & opposée à la réaction ; c'est-à-dire , que les actions de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales , & dans des directions contraires.

Tout corps qui presse ou tire un autre corps est en même-temps tiré ou pressé lui-même par cet autre corps. Si on presse une pierre avec le doigt, le doigt est pressé en même-temps par la pierre. Si un cheval tire une pierre par le moyen d'une corde, il est également tiré par la pierre : car la corde qui les joint & qui est tendue des deux côtés, fait un effort égal pour tirer la pierre vers le cheval, & le cheval vers la pierre ; & cet effort s'oppose autant au mouvement de l'un, qu'il excite le mouvement de l'autre.

Si un corps en frappe un autre, & qu'il change son mouvement, de quelque façon que ce soit, le mouvement du corps choquant sera aussi changé de la même quantité & dans une direction contraire par la force du corps choqué, à cause de l'égalité de leur pression mutuelle.

Par ces actions mutuelles, il se fait des changemens égaux, non pas de vitesse, mais de mouvement, pourvu qu'il ne s'y mêle aucune cause étrangère ; car les changemens de vitesse qui se font de la même manière dans des directions contraires doivent être réciproquement proportionnels aux masses, à cause que les changemens de mouvement sont égaux. Cette loi a lieu aussi dans les attractions, comme je le prouverai dans le scholie suivant.

COROLLAIRE I.

Un corps poussé par deux forces parcourt, par leurs actions réunies, la Diagonale d'un parallélogramme dans le même temps, dans lequel il auroit parcouru ses côtés séparément.

AXIOMES,
OU LOIX
DU
MOUVEMENT.

Si le corps, pendant un temps donné, eut été transporté de A en B , d'un mouvement uniforme par la seule force M imprimée en A ; & que par la seule force N , imprimée dans le même lieu A , il eut été transporté de A en C , le corps par ces deux forces réunies fera transporté dans le même temps dans la diagonale AD du parallélogramme $ABCD$; car puisque la force N agit selon la ligne AC parallèle à BD , cette force, selon la seconde loi du mouvement, ne changera rien à la vitesse avec laquelle ce corps s'approche de cette ligne BD , par l'autre force M . Le corps s'approchera donc de la ligne BD dans le même temps, soit que la force N lui soit imprimée, soit qu'elle ne le soit pas; ainsi à la fin de ce temps il fera dans quelque point de cette ligne BD . On prouvera de la même manière qu'à la fin de ce même temps le corps fera dans un point quelconque de la ligne CD . Donc il fera nécessairement dans le point d'intersection D de ces deux lignes, & par la première loi il ira d'un mouvement rectiligne de A en D .

Fig. 1.

COROLLAIRE II.

D'où l'on voit qu'une force directe AD est composée des forces obliques quelconques AB & BD , & réciproquement qu'elle peut toujours se résoudre dans les forces obliques quelconques AB & BD . Cette résolution & cette composition des forces se trouve confirmée à tout moment dans la mécanique.

Supposons que du centre O d'une rouë partent des rayons inégaux OM , ON , qui soutiennent par des fils MA , NP des poids A & P , & qu'on cherche les forces de ces poids pour faire tourner cette rouë.

Fig. 2.

Fig. 2.

On mena d'abord par le centre O la droite KOL perpendiculaire en K & en L aux fils MA , NP , & du centre O & de l'intervalle OL , le plus grand des intervalles OK , OL on décrira un cercle. On tirera ensuite par le centre O , & par l'intersection D de ce cercle avec le fil MA la droite OD à laquelle on mena par A la parallèle AC , terminée en C par la droite DC , qui lui est perpendiculaire. Cela posé, comme il est indifférent que les points K , L , D , des fils soient attachés ou non au plan de la rouë, les poids feront le même effet, soit qu'ils soient attachés aux points K & L , soit qu'ils soient attachés aux points D & L .

Soit donc exprimée la force totale du corps A par la ligne AD , & soit cette force décomposée dans les deux forces AC , & CD , la première AC tirant le rayon OD dans sa direction, ne contribue point au mouvement de la rouë; mais la seconde DC tirant le rayon OD perpendiculairement, fait le même effet que si elle tiroit perpendiculairement le rayon OL égal à OD , c'est-à-dire qu'elle sera équivalente au poids P , pourvu que ce poids soit au poids A , comme la force DC est à la force DA , ou, ce qui revient au même (à cause des triangles semblables ADC , DOK) comme OK à OD ou OL : Donc si les poids A & P sont pris dans la raison renversée des rayons OK , OL , auxquels ils sont appliqués, ils seront en équilibre, ce qui est la propriété si connue du levier, de la balance, & du treuil. Si l'un des poids est à l'autre dans une plus grande raison, la force en sera d'autant plus grande pour mouvoir la rouë.

Supposons présentement que le poids p égal au poids P , soit en partie soutenu par le fil Np , & en partie par le plan pG , on mena pH & NH , la première perpendiculaire à l'horison, & l'autre au plan pG , & prenant pH pour exprimer la force avec laquelle le corps p tend en en bas, on décomposera cette force dans les deux pH & NH . Imaginant ensuite que le poids p , au lieu d'être attaché au fil Np , fut arrêté par un plan pQ perpendiculaire à la direction Np , & coupant le plan pG , dans une ligne

parallèle à l'horison, il est clair que les forces avec lesquelles le corps presseroit les plans pQ , pG , qui le retiendroient dans cette supposition, seroient exprimées, la première par pN , & la seconde par HN . Donc en supprimant le plan pQ , & laissant le fil Np qui fait absolument le même effet, la tension de ce fil sera la même force pN avec laquelle le plan pQ étoit pressé.

Ainsi la tension du fil, lorsqu'il est dans la situation oblique pN , est à la tension du même fil, lorsqu'il a, comme dans le cas précédent, la situation perpendiculaire PN , comme pN à pH . C'est pourquoi si le poids p est au poids A dans la raison composée de la raison réciproque des moindres distances du centre de la rouë aux fils pN & AM , & de la raison directe de pH à pN ; ces poids auront une égale force pour faire mouvoir la rouë, & seront par conséquent en équilibre, ce dont tout le monde peut reconnoître la vérité.

Le poids p , en s'appuyant sur ces deux plans obliques, est dans le même cas qu'un coin entre les deux surfaces internes du corps qu'il fend: & on peut connoître par-là les forces du coin & du marteau: puisqu'en effet la force avec laquelle le corps p , presse le plan pQ , est à la force avec laquelle ce même corps est poussé vers ces plans, suivant la ligne perpendiculaire pH , par la force de sa gravité ou par les coups du marteau, comme pN à pH ; & à la force par laquelle il presse l'autre plan pG , comme pN à HN .

On peut par une semblable décomposition des forces trouver la force de la vis; car la vis n'est autre chose qu'un coin mû par un levier, ce qui fait voir la fécondité de ce Corollaire, & fournit de nouvelles preuves de sa vérité; il peut servir de base à toute la mécanique dans laquelle on a employé jusqu'à présent tant de différens principes.

On en tire aisément, par exemple, les forces de toutes les machines composées de rouës, de tambours, de poulies, de leviers, de cordes tendues, de poids montans directement ou obliquement,

AXIOMES,
OU LOIX
DU
MOUVEMENT.

Fig. 1

& enfin de toutes les puissances dont les machines sont ordinairement composées; on en tireroit aussi les forces nécessaires aux tendons pour mouvoir les membres des animaux.

COROLLAIRE III.

La quantité de mouvement, qui résulte de la somme de tous les mouvemens vers le même côté, & de leurs différences vers des côtés opposés, ne change point par l'action des corps entr'eux.

L'action & la réaction sont égales, suivant la troisième loi; donc par la seconde elles produisent dans les mouvemens des changemens égaux dans des directions opposées. Donc si les mouvemens se font du même côté; ce qui sera ajouté au mouvement du corps chassé, doit être ôté du mouvement de celui qui le fuit, en sorte que la somme des mouvemens demeure la même qu'auparavant. Si les corps viennent de deux côtés opposés, il faudra retrancher également du mouvement de ces deux corps, & par conséquent la différence des mouvemens vers des côtés opposés demeurera toujours la même.

Supposons, par exemple, que la boule *A* soit triple de la boule *B*, & qu'elle ait deux parties de vitesse, & que *B* la suive dans la même ligne droite avec 10 parties de vitesse, le mouvement du corps *A* fera à celui du corps *B*, comme 6 à 10: Prenant donc 6 & 10 pour exprimer les quantités de mouvement de ces corps, 16 fera la somme de leurs mouvemens.

Lorsque ces corps viendront à se rencontrer, si le corps *A* gagne 3, 4 ou 5 parties de mouvement, le corps *B* en perdra autant, en sorte que le corps *A*, après la réflexion continuant son chemin avec 9, 10 ou 11 parties de mouvement, le corps *B*, ira avec 7, 6 ou 5, & la somme fera toujours de 16 parties comme auparavant. Si le corps *A* gagne 9, 10, 11 ou 12 parties, & qu'il poursuive par conséquent son chemin après le choc avec 15, 16, 17 ou 18 parties de mouvement; le corps *B* perdant tout ce que le corps *A* gagne, continuera de se mouvoir

vers le même côté avec une partie de mouvement, après en avoir perdu 9, ou il restera en repos, ayant perdu les 10 parties de mouvement progressif qu'il avoit, ou il retournera vers le côté opposé avec un degré de mouvement, après avoir perdu tout ce qu'il avoit & même une partie de plus (si je puis m'exprimer ainsi), ou bien enfin il retournera vers le côté opposé avec deux parties de mouvement, après avoir perdu 12 parties de son mouvement progressif. Ainsi les sommes des mouvemens conspirans $15+1$ ou $16+0$, & les différences des mouvemens opposés $17-1$ & $18-2$, feront toujours 16 parties comme avant le choc & la réflexion : Connoissant donc la quantité de mouvement avec laquelle les corps se meuvent après la réflexion, on trouvera la vitesse de chacun, en supposant que cette vitesse soit à la vitesse avant la réflexion, comme le mouvement après la réflexion est au mouvement avant la réflexion. Ainsi dans le dernier cas, où le corps A avoit 6 parties de mouvement avant la réflexion, & 18 après, & 2 de vitesse avant la réflexion ; on trouveroit que la vitesse après la réflexion seroit 6, en disant, comme 6 parties de mouvement avant la réflexion, sont à 18 parties après la réflexion ; ainsi 2 de vitesse avant la réflexion sont à 6 de vitesse après la réflexion.

Si les corps n'étoient pas sphériques, ou que se mouvant suivant diverses lignes droites, ils vinssent à se choquer obliquement, pour trouver leur mouvement après la réflexion ; il faudra commencer par connoître la situation du plan qui touche tous les corps choquans au point de concours : Ensuite (par le Cor. 2.) on décomposera le mouvement de chaque corps en deux mouvemens, l'un perpendiculaire & l'autre parallèle à ce plan tangent : & comme les corps n'agissent les uns sur les autres que selon la ligne perpendiculaire au plan tangent, les mouvemens parallèles seront les mêmes après & avant la réflexion ; & les mouvemens perpendiculaires éprouveront des changemens égaux vers les côtés opposés ; enforte que la somme des mouvemens conspirans & la différence des mouvemens opposés, resteront toujours les mêmes

qu'auparavant. C'est de ces sortes de réflexions que viennent ordinairement les mouvemens circulaires des corps autour de leurs centres ; mais je ne considérerai point ces cas dans la suite , parce qu'il seroit trop long de démontrer tout ce qui y a rapport.

COROLLAIRE IV.

Le centre commun de gravité de deux corps ou de plusieurs corps ne change point son état de mouvement ou de repos , par l'action réciproque de ces corps ; ainsi le centre commun de gravité de tous les corps qui agissent les uns sur les autres (supposé qu'il n'y ait aucune action ni aucun obstacle extérieur) est toujours en repos , ou se meut uniformément en ligne droite.

Car , si deux points se meuvent uniformément en ligne droite , & que leur distance soit divisée en raison donnée , le point de division sera en repos , ou il se mouvra uniformément en ligne droite. C'est ce qu'on trouvera démontré ci-après dans le Lemme 23 & dans son Corollaire , pour le cas où les deux points se meuvent dans le même plan ; & ce qui se démontre facilement par la même méthode pour le cas où les deux points seroient dans des plans différens. Donc , si des corps quelconques se meuvent uniformément en ligne droite , le commun centre de gravité de deux de ces corps , ou sera en repos , ou se mouvra uniformément en ligne droite ; parce que la ligne , qui joint les centres de ces corps , sera divisée par leur centre commun de gravité dans une raison donnée. De même le commun centre de gravité de ces deux corps & d'un troisième , sera en repos ou se mouvra uniformément en ligne droite ; à cause que la ligne qui joint le centre commun de gravité de ces deux corps , & le centre du troisième sera encore divisée par le commun centre de gravité de ces trois corps en raison donnée. Enfin le commun centre de gravité de ces trois corps & d'un quatrième quelconque sera en repos ou sera mû uniformément en ligne droite ; parce que la ligne qui joint le centre commun de gravité de ces trois corps , & le centre du quatrième sera
divisée

divisée par le centre commun de gravité de ces quatre corps en raison donnée & ainsi à l'infini. Donc dans un système de corps, dont les actions réciproques les uns sur les autres ne sont point troublées par aucune action ou empêchement externe, & dont par conséquent chacun se meut uniformément en ligne droite, le commun centre de gravité de tous ces corps sera en repos ou sera mu uniformément en ligne droite.

AXIOMES,
OU LOIX
DU
MOUVEMENT.

De plus, dans un système composé de deux corps qui agissent l'un sur l'autre, les distances des centres de chacun de ces corps à leur commun centre de gravité étant en raison réciproque de la masse de ces corps; les mouvemens relatifs de ces corps, pour s'éloigner ou pour s'approcher de ce centre commun de gravité, seront égaux entr'eux. Donc, ni les changemens égaux qui se font dans le mouvement de ces corps en sens contraire, ni par conséquent leur action mutuelle l'un sur l'autre, ne changeront rien à l'état de leur centre commun de gravité qui ne sera ni accéléré ni retardé, & qui ne recevra enfin aucune altération dans son état de mouvement ou de repos.

Puisque dans un système de plusieurs corps, le centre de gravité de deux quelconques de ces corps qui agissent l'un sur l'autre, ne change point d'état par cette action; & que le commun centre de gravité des autres, avec lesquels cette action n'a aucun rapport, n'en souffre aucune altération; la distance de ces deux centres sera divisée par le centre commun de tous ces corps dans des parties réciproquement proportionnelles aux sommes totales des corps dont ils sont les centres; & par conséquent ces deux centres conservant leur état de repos ou de mouvement, le centre commun de tous ces corps conservera aussi le sien; car il est clair que le centre commun de tous ces corps ne changera point son état de repos ou de mouvement par les actions de deux quelconques de ces corps entr'eux.

Or, dans un tel système, toutes les actions des corps les uns sur les autres, ou sont exercées entre deux corps, ou sont composées.

d'actions entre deux corps ; & par conséquent elles ne produisent aucun changement dans l'état de repos ou de mouvement du centre commun de tous ces corps. C'est pourquoi comme ce centre est en repos , ou qu'il se meut uniformément en ligne droite , lorsque les corps n'agissent point les uns sur les autres ; il continuera de même , malgré l'action réciproque de ces corps , à être en repos , ou à se mouvoir uniformément en ligne droite , pourvu qu'il ne soit point tiré de son état par des forces étrangères.

La loi d'un système de plusieurs corps est donc la même que celle d'un corps seul , quant à la permanence dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite où ils se trouvent. Et le mouvement progressif d'un corps ou d'un système de corps , doit toujours s'estimer par le mouvement de leur centre de gravité.

C O R O L L A I R E V.

Les mouvemens des corps enfermés dans un espace quelconque sont les mêmes entr'eux , soit que cet espace soit en repos , soit qu'il se meuve uniformément en ligne droite sans mouvement circulaire.

Car les différences des mouvemens qui tendent vers le même côté , & les sommes de ceux qui tendent vers des côtés opposés , sont les mêmes au commencement du mouvement dans l'un & l'autre cas (par l'hypothèse ,) mais c'est de ces sommes ou de ces différences qu'on tire l'effort avec lequel les corps se choquent mutuellement : Donc par la seconde loi les effets du choc seront les mêmes dans ces deux cas ; & par conséquent les mouvemens de ces corps entr'eux , dans un de ces cas , demeureront égaux à leurs mouvemens entr'eux dans l'autre cas , ce que l'expérience confirme tous les jours. Car les mouvemens qui se font dans un vaisseau sont les mêmes entr'eux , soit que le vaisseau marche uniformément en ligne droite , soit qu'il soit en repos.

COROLLAIRE VI.

Si des corps se meuvent entr'eux d'une façon quelconque, & qu'ils soient poussés par des forces accélératrices égales, & qui agissent sur eux, suivant des lignes parallèles, ils continueront à se mouvoir entr'eux de la même manière que si ces forces ne leur avoient pas été imprimées.

AXIOMES,
OU LOIX,
DU
MOUVEMENT.

Car ces forces agissant également (par rapport à la quantité de matière des corps à mouvoir) & suivant des lignes parallèles, elles feront mouvoir tous ces corps avec des vîteses égales par la seconde loi. Ainsi elles ne changeront point les positions & les mouvemens de ces corps entr'eux.

S C H O L I E.

Les principes que j'ai expliqué jusqu'à présent font reçus de tous les Mathématiciens, & confirmés par une infinité d'expériences. Les deux premières loix du mouvement & les deux premiers Corollaires ont fait découvrir à *Galilée* que la descente des graves est en raison doublée du temps, & que les Projectiles décrivent une Parabole; ce qui est conforme à l'expérience, si on fait abstraction de la résistance de l'air qui retarde un peu tous ces mouvemens.

La gravité étant uniforme, elle agit également à chaque particule égale de temps, ainsi elle imprime au corps qui tombe des vîteses & des forces égales : & dans le temps total elle lui imprime une force totale & une vîtesse totale proportionnelle au temps. Mais les espaces décrits dans des temps proportionnels, sont comme les vîteses & les temps conjointement; c'est-à-dire, en raison doublée des temps. Donc, lorsque les corps sont jettés en enhaut, la gravité leur imprime des forces & leur ôte des vîteses proportionnelles au temps. Ainsi les temps que ces corps mettent à monter à la plus grande hauteur, sont comme les vîteses que la gravité leur fait perdre, & ces hauteurs sont comme les temps multipliés par les vîteses, ou en raison doublée des vîteses. Le mouvement d'un corps jetté suivant une ligne droite

AXIOMES,
OU LOIX
DU
MOUVEMENT.

quelconque, est donc composé du mouvement de projection & du mouvement que la gravité lui imprime. Enforte que si le corps A , par le seul mouvement de projection peut décrire dans un temps donné la droite AB , & que par le seul mouvement qui le porte vers la terre, il puisse décrire la ligne AC dans le même temps : en achevant le Parallélogramme $ABCD$, ce corps, par un mouvement composé, fera à la fin de ce temps au lieu D ; & la courbe AED qu'il décrira fera une Parabole que la droite AB touchera au point A , & dont l'ordonnée BD sera proportionnelle à AB^2 .

Fig. 3.

C'est sur ces mêmes loix & sur leurs corollaires qu'est fondée la théorie des oscillations des Pendules, vérifiée tous les jours par l'expérience. Par ces mêmes loix le Chevalier *Christophe Wrenn*, *J. Wallis S. T. D.* & *Chrétien Hugen*, qui sont sans contredit les premiers Géomètres des derniers, temps ont découvert, chacun de leur côté, les loix du choc & de la réflexion des corps durs; ils communiquèrent presque en même temps leurs découvertes à la Société Royale; ces découvertes s'accordent parfaitement sur ce qui concerne ces loix: *Wallis* fut le premier qui en fit part à la Société Royale; ensuite *Wrenn*, & enfin *Hugen*; mais ce fut *Wrenn* qui les confirma par des Expériences faites avec des Pendules devant la Société Royale: lesquelles le célèbre *Mariotte* a rapportées depuis dans un Traité qu'il a composé exprès sur cette matière.

Pour que cette théorie s'accorde parfaitement avec l'expérience; il faut faire attention, tant à la résistance de l'air, qu'à la force élastique des corps qui se choquent. Soient A & B des corps sphériques suspendus à des fils parallèles & égaux, AC , BD , attachés aux centres C & D , & soient décrits autour de ces points comme centre, & des intervalles AC , BD , les demi-cercles EAF , GBH séparés chacun en deux parties égales par les rayons AC , BD . Si on élève le corps A jusqu'au point quelconque R de l'arc EAF , & qu'ayant ôté le corps B , on laisse tomber le corps A , & que ce corps, après une oscillation, revienne au point V , RV ,

Fig. 4.

fera le retardement causé par la résistance de l'air. Si on prend alors ST égale à la quatrième partie de RV , & placée en telle sorte que $RS = VT$, ST exprimera à peu près le retardement que le corps A éprouve en descendant de S vers A .

AXIOMES,
OU LOIX
DU
MOUVEMENT.

Qu'on remette présentement le corps B à sa place, & qu'on laisse tomber le corps A , du point S , sa vitesse au point A où il doit se réfléchir, sera la même, sans erreur sensible, que s'il tomboit du point T dans le vuide. Cette vitesse sera donc exprimée par la corde de l'arc TA ; car c'est une proposition connue de tous les Géomètres, que la vitesse d'un corps suspendu par un fil est au point le plus bas de sa chute, comme la corde de l'arc qu'il a parcouru en tombant.

Supposons que le corps A parvienne après la réflexion en s , & le corps B en k , qu'on ôte encore le corps B , & qu'on trouve le lieu v duquel laissant tomber le corps A , ils reviennent après une oscillation au lieu r , de plus que st soit la quatrième partie de rv placée en telle sorte que $rs = tv$, tA exprimera la vitesse que le corps A avoit en A l'instant d'après la réflexion. Car t sera le lieu vrai & corrigé auquel le corps A devoit remonter, si l'on faisoit abstraction de la résistance de l'air. On corrigera par la même méthode le lieu k , auquel le corps B remonte; & on trouvera le lieu l auquel il auroit dû remonter dans le vuide, & par ce moyen on fera ces expériences aussi exactement dans l'air que dans le vuide. Enfin pour avoir le mouvement du corps A , au lieu A , immédiatement avant la réflexion, il faudra multiplier le corps A , si je puis m'exprimer ainsi, par la corde de l'arc TA , qui exprime sa vitesse; ensuite il faut le multiplier par la corde de l'arc tA , pour avoir son mouvement au lieu A , immédiatement après la réflexion. De même, il faudra multiplier le corps B , par la corde de l'arc Bl , pour avoir son mouvement immédiatement après la réflexion.

Par la même méthode, lorsque les deux corps tomberont en même temps de deux hauteurs différentes, on trouvera le mouve-

ment de l'un & de l'autre, tant avant qu'après la réflexion; & l'on pourra toujours, par ce moyen, comparer ces mouvemens entr'eux, & en conclure les effets de la réflexion.

Suivant cette méthode, dans les expériences que j'ai fait avec des Pendules de 10 pieds de long auxquels j'avois suspendu tantôt des corps égaux, tantôt des corps inégaux, & que j'avois fait se choquer en tombant de très haut, comme de 8, 12 & 16 pieds, j'ai toujours trouvé, à des différences près, lesquelles étoient moindres que trois pouces dans les mesures, que lorsque les corps se rencontroient directement, les changemens de mouvement vers les points opposés étoient toujours égaux, & que par conséquent la réaction étoit toujours égale à l'action. Lorsque le corps *A*, par exemple, ayant 9 parties de mouvement venoit à choquer le corps *B* en repos, & qu'après avoir perdu 7 parties de mouvement, il continuoit après la réflexion à se mouvoir avec deux parties, le corps *B* rejaillissoit avec ces 7 parties.

Si les deux corps alloient l'un vers l'autre, *A* avec 12 parties de mouvement & *B* avec 6, & qu'après le choc *A* s'en retournât avec 2 parties, *B* s'en retournoit avec 8, & il y avoit 14 parties de détruites de chaque côté. Car si du mouvement de *A* on en ôte d'abord 12 parties, il ne lui reste rien: si on ôte ensuite 2 autres parties, il en naît deux parties de mouvement en sens contraire: de même en ôtant 14 parties du mouvement du corps *B*, il en naît 8 parties vers le côté opposé.

Lorsque les deux corps alloient vers le même côté, *A* plus vite avec 14 parties de mouvement, & *B* plus lentement avec 5 parties, & qu'après la réflexion le corps *A* continuoit de se mouvoir avec 5 parties, le corps *B* continuoit alors à se mouvoir avec 14 parties, enforte qu'il avoit acquis les neuf parties que le corps *A* avoit perdu; il en étoit de même dans tous les autres cas. La quantité de mouvement n'étoit jamais changée par le choc, elle se retrouvoit toujours ou dans la somme des mouvemens conspirans ou dans la différence des mouvemens opposés; & j'ai attribué les

erreurs d'un ou deux pouces que j'ai trouvé dans les mesures à la difficulté de prendre ces mesures avec assez d'exactitude; car il étoit difficile de faire tomber les Pendules dans le même instant, enforte que les corps se rencontraient dans le lieu le plus bas AB ; & de marquer exactement les lieux s & k auxquels les corps remontoient après le choc; & il pouvoit encore s'y mêler d'autres causes d'erreur, comme l'inégale densité des parties des corps suspendus, leur différente texture, &c.

AXIOMES,
OU LOIX
DU
MOUVEMENT.

Et afin qu'on ne m'objecte pas que la loi que j'ai voulu prouver par ces Expériences suppose les corps ou parfaitement durs, ou parfaitement élastiques, & que nous ne connoissons point de tels corps, j'ajouterai que ces Expériences réussissent aussi-bien sur les corps mols que sur les corps durs, & que par conséquent la vérité de ce principe ne dépend point de la dureté des corps; car si on veut l'appliquer aux cas où les corps ne sont pas parfaitement durs, il faudra seulement diminuer la réflexion dans une certaine proportion relative à la quantité de la force élastique.

Dans la théorie de *Wrenn* & d'*Hugens*, les corps absolument durs, après s'être choqués, s'éloignent l'un de l'autre avec la même vitesse qu'ils avoient dans le choc. On peut l'assurer avec encore plus de certitude des corps parfaitement élastiques. Dans les corps qui ne sont pas parfaitement élastiques, la vitesse avec laquelle ils s'en retournent après le choc, doit être diminuée relativement à la force élastique; & parce que cette force (pourvu que les parties des corps ne soient point altérées par la collision, ou qu'elles ne souffrent point d'extension comme celle que cause le marteau) est constante & déterminée, ainsi que je l'ai remarqué; elle fait que les corps rejaillissent avec une vitesse relative qui est à la vitesse qu'ils avoient avant le choc dans une raison donnée.

Je fis aussi cette expérience avec des pelottes de laine très serrées. Je commençai par déterminer la quantité de la force élastique, en faisant tomber les Pendules & en mesurant la réflexion :

& ensuite connoissant cette force, j'en conclus les réflexions pour d'autres cas, & je trouvai que les expériences y répondoient. Les pelottes s'éloignoient toujours l'une de l'autre après le choc avec une vitesse relative, qui étoit à leur vitesse relative dans le choc, comme 5 à 9 environ. Les boules d'acier rejaillissoient à peu près avec leur même vitesse : les boules de liége rejaillissoient avec une vitesse un peu moindre ; & dans les boules de verre ces vitesses étoient à peu près comme 15 à 16. ainsi la troisieme loi se trouve confirmée dans le choc & dans la réflexion des corps par la théorie, & la théorie, l'est par l'expérience. Je vais faire voir qu'elle l'est aussi dans les attractions.

Imaginez entre les deux corps *A* & *B* un obstacle quelconque qui les empêche de se joindre. Si un de ces corps comme *A* est plus attiré vers *B*, que *B* vers *A*, l'obstacle sera plus pressé par le corps *A* que par le corps *B* ; ainsi il ne sera point en équilibre. La plus forte pression prévaudra, & il arrivera que le système, composé de ces deux corps & de l'obstacle qui est entre deux, se mouvra en ligne droite vers *B*, & qu'il s'en ira à l'infini dans le vuide avec un mouvement continuellement accéléré, ce qui est absurde. & contraire à la premiere loi du mouvement ; car par cette premiere loi, ce système doit persévérer dans son état de repos ou de mouvement en ligne droite ; ainsi ces deux corps doivent presser également cet obstacle, & être par conséquent tirés également l'un vers l'autre.

J'en ai fait l'expérience sur le fer & sur l'aimant. Si on pose l'aimant & le fer chacun séparément dans de petits vaisseaux sur une eau dormante, & que ces petits vaisseaux se touchent, ni l'un ni l'autre ne fera mû ; mais ils soutiendront par l'égalité de leur attraction les efforts mutuels qu'ils font l'un sur l'autre, & étant en équilibre, ils resteront en repos.

De même, la gravité entre la terre & ses parties est mutuelle ;
 Fig. 5. car supposé que la terre *FI* fût coupée par un plan *EG* en deux parties *EGF*, *EGI* : les poids mutuels de ces parties l'une sur l'autre,

l'autre, seront égaux; car si la plus grande partie EGI est coupée par un autre plan HK parallèle au premier, en deux parties $EGHK$ & HIK , desquelles $HIK = EFG$: il est clair que la partie du milieu $EGHK$ ne sera portée par son propre poids ni vers l'une, ni vers l'autre de ces parties, mais qu'elle restera en équilibre entr'elles.

AXIOMES,
OU LOIX
DU
MOUVEMENT.

Quant à la partie HIK , elle pressera de tout son poids la partie du milieu vers l'autre partie EFG ; donc la force avec laquelle la partie EGI , composée des parties HKI & $EGHK$, tend vers la troisième partie EFG , est égale au poids de la partie HIK , c'est-à-dire au poids de la troisième partie EFG . Ainsi le poids de deux parties EGI , EFG , l'une sur l'autre est égal, ce que je voulois prouver. Et si ces poids n'étoient pas égaux, toute la terre qui nage librement dans l'éther céderoit au plus grand de ces poids, & s'en iroit à l'infini.

De même que les corps qui se choquent se font équilibre, quand leurs vitesses sont réciproquement comme leurs forces d'inertie (*ut vires inertiae* :) les puissances qui agissent dans la mécanique se contrebalancent & détruisent leurs efforts mutuels, quand leurs vitesses dans la direction des forces sont réciproquement comme ces forces. Ainsi des poids attachés aux bras d'une balance font des efforts égaux pour la mouvoir, lorsque ces poids sont réciproquement comme les vitesses qu'auroient les bras de la balance en haut & en bas, si elle venoit à osciller; c'est-à-dire, que ces poids sont en équilibre, lorsque les bras de la balance montent & descendent perpendiculairement, s'ils sont entr'eux réciproquement comme la distance du point de suspension au fléau de la balance; & si les bras de la balance montent & descendent obliquement, soit qu'ils soient soutenus par des plans obliques, ou que quelqu'autre obstacle les empêche de monter & de descendre perpendiculairement, les poids seront en équilibre, lorsqu'ils seront entr'eux réciproquement, comme l'ascension & la descente perpendiculaire des bras de la balance; parce-

que la force de la gravité est toujours dirigée perpendiculairement vers la terre.

De même, dans la poulie ou dans le mouffle, si la force de la main qui tire la corde directement, est au poids qui monte directement ou obliquement, comme la vitesse de son ascension perpendiculaire à la vitesse de la main qui tire la corde, il y aura équilibre.

Dans les Horloges & les autres machines dont la construction dépend du jeu de plusieurs rouës, les forces contraires qui font des efforts pour les mouvoir & pour les retenir, se contrebalanceront mutuellement, si elles sont entr'elles réciproquement comme les vitesses des parties des rouës auxquelles elles sont imprimées.

La force de la vis pour presser un corps est à la force de la main qui tourne la manivelle, comme la vitesse circulaire de la manivelle dans la partie où la main la fait tourner, est à la vitesse progressive de la vis vers le corps qu'elle presse.

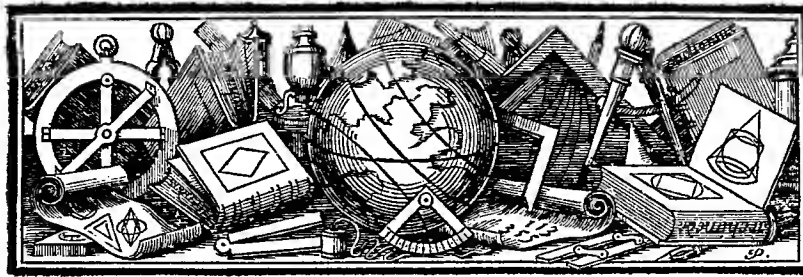
Les forces avec lesquelles le coin presse les deux côtés du bois qu'il fend, sont à la force avec laquelle le marteau frappe le coin, comme le chemin que fait le coin dans la direction de la force que lui impriment les coups du marteau, est à la vitesse avec laquelle les parties du bois cedent au coin selon les lignes perpendiculaires aux faces du coin. Il en est de même dans toutes les machines dont l'efficacité consiste en cela seulement, qu'en diminuant la vitesse on augmente la force & réciproquement; & c'est par-là qu'on résout ce Problème dans toutes les especes de machines, *que le poids étant donné, la force nécessaire pour le mouvoir est donnée*, ou ce qui est la même chose, *que la résistance étant donnée, la force nécessaire pour la surmonter est donnée aussi*. Car lorsque les machines seront construites de façon que la vitesse de la puissance soit à celle de la résistance en raison renversée des forces; la puissance égalera la résistance: & si on augmente la vitesse de la puissance, elle vaincra aussitôt la résistance.

Si la disparité des vitesses est assez grande pour vaincre toute

espèce de résistance, tant celle qu'oppose la pesanteur des corps qu'on veut élever, que celle qui vient de la cohésion des corps qu'on veut séparer, & que celle qui est produite par le frottement des corps qui glissent les uns sur les autres, la force restante produira une accélération de mouvement qui lui sera proportionnelle, & qui sera partagée entre les parties de la machine, & le corps résistant; mais je ne me suis pas proposé ici de donner un Traité de Méchanique, j'ai voulu montrer seulement combien la troisième loi du mouvement est vraie, & combien son usage est étendu; car si on estime l'action de l'agent par sa force multipliée par sa vitesse, & qu'on estime de même la réaction du corps résistant par la vitesse de chacune de ses parties multipliées par les forces qu'elles ont pour résister en vertu de leur cohésion, de leur attrition, de leur poids, & de leur accélération; l'action & la réaction se trouveront égales entr'elles, dans les effets de toutes les machines. Et toutes les fois qu'une action s'exécute par le moyen d'une machine, & qu'elle parvient à être imprimée dans un corps résistant, la dernière détermination est toujours contraire à la détermination de la réaction de ce corps.

AXIOMES,
OU LOIX
DU
MOUVEMENT.





DU MOUVEMENT DES CORPS.

LIVRE PREMIER.

SECTION PREMIERE.

*De la méthode des premières & dernières raisons employée dans
tout cet Ouvrage.*

LEMME PREMIER.

*Les quantités & les raisons des quantités qui tendent continuellement à
devenir égales pendant un temps fini, & qui avant la fin de ce temps
approchent tellement de l'égalité, que leur différence est plus petite
qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales.*

S I on le nie, qu'on suppose qu'elles soient à la fin inéga-
les, & que leur dernière différence soit D , puisqu'elles
ne peuvent pas approcher plus près de l'égalité que
de cette différence donnée D , leur différence ne fera donc pas
plus petite que toute différence donnée, ce qui est contre l'hypo-
thèse.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

L E M M E I I.

Si dans une figure quelconque $AacE$, comprise entre les droites Aa , AE , & la courbe $a c E$, on inscrit un nombre quelconque de Parallélogrammes Ab , Bc , Cd , &c. compris sous les bases égales AB , BC , CD , &c. & sous les côtés Bb , Cc , Dd , &c. parallèles au côté Aa de la figure ; & qu'on acheve les parallélogrammes $akbl$, $bLcm$, $cMdn$, &c. qu'on diminue ensuite la largeur de ces parallélogrammes, & qu'on augmente leur nombre à l'infini : les dernières raisons qu'auront entr'elles la figure inscrite $AKbLcM dD$, la circonscrite $Aalbmcnd oE$, & la curviligne $Aab c d E$, seront des raisons d'égalité.

Car la différence de la figure inscrite & de la figure circonscrite, est la somme des parallélogrammes Kl , Lm , Mn , Do , c'est-à-dire (à cause de l'égalité de toutes les bases) que cette différence est égale au rectangle $ABla$ fait sur l'une des bases Kb & sur la somme Aa , de toutes les hauteurs ; mais ce rectangle, à cause que sa largeur diminue à l'infini, deviendra plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc (par le Lemme premier) la figure inscrite, la figure circonscrite, & à plus forte raison la figure curviligne intermédiaire seront à la fin égales. *C. Q. F. D.*

L E M M E I I I.

Les dernières raisons de ces mêmes figures seront encore des raisons d'égalité, quoique les bases AB , BC , CD , &c. des parallélogrammes soient inégales, pourvu qu'elles diminuent toutes à l'infini.

Soit AF la plus large de ces bases, & soit achevé le parallélogramme $FAaf$. Ce parallélogramme fera plus grand que la différence de la figure inscrite & de la figure circonscrite ; mais sa largeur AF diminuant à l'infini, il sera plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc &c. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. D'où il suit que la dernière somme de tous les parallélogrammes qui s'évanouissent coïncidera dans toutes ses parties avec la figure curviligne.

Cor. 2. Et à plus forte raison la figure rectiligne, comprise sous les cordes des arcs évanouissans ab , bc , cd ; &c. coïncidera à la fin avec la figure curviligne.

Cor. 3. Il en fera de même de la figure rectiligne circonscrite, qui est comprise sous les tangentes de ces mêmes arcs.

Cor. 4. Et par conséquent ces dernières figures (quant à leurs périmètres acE) ne sont pas rectilignes, mais les limites curvilignes des figures rectilignes.

L E M M E I V.

Si dans deux figures $AacE$, $PprT$, on inscrit, comme ci-dessus, deux suites de parallélogrammes, dont le nombre soit le même, & que lorsque leurs largeurs diminuent à l'infini, les dernières raisons des parallélogrammes de l'une des figures aux parallélogrammes de l'autre, chacun à chacun, soient les mêmes; ces deux figures $AacE$, $PprT$ seront entr'elles dans cette même raison.

Car la proportion qu'un des parallélogrammes de la première figure a avec celui qui lui répond dans la seconde, est la même que celle de la somme de tous les parallélogrammes de la première figure, à la somme de tous les parallélogrammes de la seconde, & par conséquent la même que celle qui est entre les deux figures, en supposant toutefois, que, selon le Lemme 3. la raison de la première figure à la somme de tous les parallélogrammes qu'elle renferme, soit une raison d'égalité, aussi-bien que celle de la seconde figure à la somme de tous les Parallélogrammes qui y sont renfermés. *C. Q. E. D.*

Cor. D'où il suit, que si deux quantités d'un genre quelconque sont partagées dans un même nombre de parties quelconques, & que ces parties, lorsque leur nombre augmente & que leur grandeur diminue à l'infini, soient entr'elles en raison donnée, la première à la première, la seconde à la seconde, & ainsi de suite: les tous seront entr'eux dans cette même raison donnée; car si on représente les parties de ces tous par les parallélogrammes des figures de ce Lemme, les sommes de ces parties seront comme

les sommes des parallélogrammes ; & par conséquent, lorsque le nombre de ces parties & des Parallélogrammes augmente, & que leur grandeur diminue à l'infini, les tours seront dans la dernière raison d'un Parallélogramme à l'autre : c'est-à-dire, par l'hypothèse, dans la dernière raison d'une partie à l'autre.

LEMME V.

Tous les côtés homologues des figures semblables sont proportionnels, tant dans les figures curvilignes que dans les rectilignes, & leurs aires sont en raison doublées de ces côtés.

LEMME VI.

Si un arc de cercle quelconque ACB donné de position, est soutenu par la corde AB , & qu'au point A placé dans le milieu de sa courbure continue, il soit touché par une droite AD prolongée des deux côtés, & que les points A & B s'approchent l'un de l'autre jusqu'à ce qu'ils coïncident ; l'angle BAD , compris sous la tangente & la corde diminuera à l'infini, & s'évanouira à la fin.

Car si cet angle ne s'évanouissoit pas, l'arc ACB & la tangente AD contiendroient un angle rectiligne, & par conséquent la courbure au point A ne seroit point continue, ce qui est contre l'hypothèse.

LEMME VII.

Les mêmes choses étant posées, la dernière raison qu'ont entr'elles l'arc, la corde & la tangente, est la raison d'égalité.

Car pendant que le point B s'approche du point A , supposons que les lignes AB , AD soient prolongées jusqu'aux points éloignés b & d , & qu'on mène la ligne bd parallèle à la sécante BD ; & qu'on prenne de plus $Ac b$ toujours semblable à l'arc ACB . Lorsque les points A & B coïncideront, l'angle dAb s'évanouira par le Lemme précédent; donc les droites Ab , Ad , qui restent toujours de grandeur finie, & l'arc intermédiaire $Ac b$ coïncideront & feront par conséquent égales. Donc les droites AB , AD ; & l'arc intermédiaire ACB , qui leur sont toujours proportion-

nels,

nels, s'évanouiront, & auront pour dernière raison la raison d'égalité. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Ainsi, si par B on mène une droite BF parallèle à la tangente AD , laquelle BF coupe toujours en F une ligne quelconque AF qui passe par A , la raison de cette droite BF à l'arc évanouissant ACB , fera à la fin la raison d'égalité, puis qu'achevant le parallélogramme $AFBD$, cette raison est la même que celle qu'à la droite AD avec le même arc ACB .

Cor. 2. Et si par B & par A on tire plusieurs droites BE , BD , AF , AG , qui coupent la tangente AD & la parallèle BF , la dernière raison de l'arc AB de la corde & de toutes les parties coupées AD , AE , BF , BG entr'elles fera la raison d'égalité.

Cor. 3. Et par conséquent toutes ces lignes pourront être prises l'une pour l'autre dans tous les cas où l'on se servira de la méthode des premières & dernières raisons.

L E M M E V I I I.

Si les droites données AR , BR , l'arc ACB , la corde AB , & la tangente AD , forment trois triangles RAB , $RACB$, RAD , & que les points A & B s'approchent l'un de l'autre : ces triangles, qui s'évanouiront, seront à la fin semblables, & leur dernière raison sera la raison d'égalité.

Pendant que B s'approche de A , imaginons qu'on prolonge AB , AD , AR , en b , d , r , qu'on mène rbd parallèle à RD , & qu'on prenne l'arc acb toujours semblable à l'arc ACB , lorsque les points A & B coïncideront, l'angle bAd s'évanouira, & les trois triangles rAb , $rAc b$, rAd , qui restent toujours de grandeur finie coïncideront, & seront par conséquent égaux & semblables. Donc les triangles RAB , $RACB$, RAD , qui leur sont toujours semblables & proportionnels, seront à la fin égaux & semblables entr'eux. *C. Q. F. D.*

Cor. Donc ces triangles pourront être pris l'un pour l'autre dans tous les cas où l'on emploiera la méthode des premières & dernières raisons.

LIVRE
PREMIER.

Fig. 10.

Fig. 9.

L E M M E I X.

Soient données de position la droite AE & la courbe ABC , qui se coupent sous un angle donné A , & soient menées de cette droite sous un autre angle donné les ordonnées BD , CE , qui rencontrent la courbe en B , & en C , si on suppose ensuite que les points B & C s'approchent l'un & l'autre continuellement du point A ; les aires des triangles ABD , ACE , seront à la fin entr'elles en raison doublée des côtés.

Fig. II. Pendant que les points B & C s'approchent du point A , imaginons toujours que la ligne AD soit prolongée à des points très éloignés d & e , &c en telle sorte que Ad & Ae soient toujours proportionnelles à AD & à AE , de plus que les ordonnées db , ec , tirées parallèles aux ordonnées DB , EC , rencontrent en b & c les lignes AB , AC prolongées; enfin que Abc soit une courbe semblable à ABC & Ag , une droite qui touche les deux courbes en A , & coupe les ordonnées DB , EC , db , ec , en F , G , f , g . Cela posé, lorsque les points B & C coïncideront avec le point A , la longueur Ae restant la même, l'angle cAg s'évanouira, les aires curvilignes Abd , Ace coïncideront avec les aires rectilignes Afd , Age , &c par conséquent elles feront (par le Lemme 5.) en raison doublée des côtés Ad , Ae ; mais les aires ABD , ACE sont toujours proportionnelles à ces aires, &c les côtés AD , AE à ces côtés. Donc les aires ABD , ACE sont à la fin en raison doublée des côtés AD , AE . C. Q. F. D.

L E M M E X.

Les espaces qu'une force finie fait parcourir au corps qu'elle presse, soit que cette force soit déterminée & immuable, soit qu'elle augmente ou diminue continuellement, sont dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps.

Que les lignes AD , AE représentent les temps, &c les ordonnées DB , EC les vitesses produites; les espaces décrits avec ces vitesses feront comme les aires ABD , ACE qui auroient été

décrites par la *fluxion* de ces ordonnées, c'est-à-dire (par le Lemme 9.) que ces espaces seront dans le commencement du mouvement en raison doublée des temps AD , AE . C. Q. F. D.

Cor. 1. De-là on tire aisément, que lorsque des corps qui parcoureroient dans des temps proportionnels des parties semblables de figures semblables, sont sollicités par de nouvelles forces quelconques égales & appliquées de la même manière, les déviations causées par ces forces, c'est-à-dire, les distances des points où les corps sont arrivés réellement aux points où ils seroient arrivés sans l'action de ces forces, sont entr'elles à peu près comme les quarrés des temps dans lesquels ces déviations ont été produites.

Cor. 2. Et les déviations causées par des forces proportionnelles & appliquées de même aux parties semblables de figures semblables, sont en raison composée des forces & des quarrés des temps.

Cor. 3. Il en est de même des espaces quelconques que les corps pressés par des forces diverses décrivent. Ces espaces sont encore dans le commencement du mouvement, comme les forces multipliées par les quarrés des temps.

Cor. 4. Donc, dans le commencement du mouvement, les forces sont comme les espaces décrits directement, & inversement comme les quarrés des temps.

Cor. 5. Et les quarrés des temps sont comme les espaces décrits directement, & inversement comme les forces

S C H O L I E.

Lorsqu'on compare des quantités indéterminées de différent genre, & qu'on dit que l'une d'elles est en raison directe ou inverse d'une autre : on entend par-là que la première augmente ou diminue dans la même raison que la dernière, ou dans la raison inverse ; & lorsqu'on dit qu'une quantité est directement ou inversement, comme plusieurs de ces quantités, cela signifie qu'elle augmente ou diminue en raison composée des raisons dans lesquelles ces autres quantités augmentent ou

diminuent, ou dans la raison composée des raisons renversées de ces raisons. Si on dit, par exemple, que A est directement comme B & comme C , & inversement comme D : cela veut dire que A augmentera ou diminuera en même raison que $B \times C \times \frac{1}{D}$ ou que les quantités A & $\frac{BC}{D}$ sont entr'elles en raison donnée.

LE M M E X I.

Dans toutes les courbes qui ont une courbure finie au point de contact, la soustendante évanouissante d'un angle de contact est à la fin en raison doublée de la soustendante de l'arc qu'elle termine.

Fig. 12.

Cas 1. Soient AbB cet arc, AD sa tangente, BD la soustendante de l'angle de contact, laquelle est perpendiculaire à la tangente, & AB la soustendante de l'arc. Soient ensuite AG & BG perpendiculaires à AD & à AB , & soit G la rencontre de ces perpendiculaires. Cela posé, imaginons que les points D, B, G , deviennent les points d, b, g , & que le point I soit la dernière intersection des lignes AG, BG , lorsque les points B & D sont arrivés en A ; il est clair que la distance GI peut être moindre qu'aucune distance assignable; mais à cause qu'on peut faire passer des cercles par les points A, B, G , & par les points A, b, g , on a $AB^2 = AG \times BD$ & $Ab^2 = Ag \times bd$; donc AB^2 est à Ab^2 en raison composée des raisons de AG , à Ag & de BD à bd . Mais comme on peut supposer la distance GI plus petite qu'aucune longueur assignable, la différence entre la raison de AG à Ag & la raison d'égalité peut être moindre qu'aucune différence assignable; donc la différence de la raison de AB^2 à Ab^2 à la raison de BD à bd , peut être moindre que toute différence assignable. Donc (par le Lemme 1.) la dernière raison de AB^2 à Ab^2 sera la même que la dernière raison de BD à bd . C. Q. F. D.

Cas 2. Supposé que BD soit incliné sur AD , selon un angle quelconque donné, la dernière raison de BD à bd restera toujours la même, & sera par conséquent la même que la raison de AB^2 à Ab^2 . C. Q. F. D.

Cas. 3. Quand même l'angle D ne seroit point donné, & que la droite BD convergeroit vers un point donné, ou qu'elle seroit tirée suivant une loi quelconque; les angles D & d , formés selon la même loi, tendroient toujours à devenir égaux, & à la fin leur différence deviendroit moindre que toute différence donnée, c'est-à-dire, (par le Lemme 1.) qu'ils seroient égaux à la fin, & par conséquent les lignes BD , bd seroient entr'elles dans la même raison qu'auparavant. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Comme les tangentes AD , Ad , les arcs AB , Ab , & leurs sinus BC , bc deviennent à la fin égaux aux cordes AB , Ab , leurs quarrés sont aussi à la fin comme les soutendantes BD , bd .

Cor. 2. Et ces quarrés seront aussi entr'eux à la fin comme les flèches des arcs, lesquelles coupent les cordes en deux parties égales, & convergent vers un point donné; car ces flèches sont comme les soutendantes BD , bd .

Cor. 3. Donc, lorsqu'un corps avec une vitesse donnée décrit un arc, la flèche de cet arc est en raison doublée du temps pendant lequel il est décrit.

Cor. 4. Les triangles rectilignes ADB , Adb sont à la fin en raison triplée des côtés AD , Ad , & en raison sesquiplée des côtés DB , db ; puisqu'ils sont en raison composée des côtés AD , DB , & Ad , db , de même les triangles ABC , Abc , sont à la fin en raison triplée des côtés BC , bc . J'appelle raison sesquiplée la raison sousdoublée de la raison triplée, parce qu'elle est composée de la raison simple & de la raison sousdoublée.

Cor. 5. Comme DB , db deviennent à la fin parallèles, & en raison doublée de AD & de Ad , les dernières aires curvilignes ADB , Adb seront (par la nature de la parabole,) les deux tiers des triangles rectilignes ADB , Adb ; & les segmens AB , Ab , les tiers de ces mêmes triangles, & de-là ces aires & ces segmens seront en raison triplée, tant des tangentes AD , Ad , que des cordes & des arcs AB , Ab .

Au reste, dans toutes ces démonstrations nous supposons que l'angle de contact n'est ni infiniment plus grand que les angles de contact contenus entre la tangente & la corde des cercles; ni infiniment plus petit que ces mêmes angles, c'est-à-dire que nous supposons que la courbure au point A n'est ni infiniment petite, ni infiniment grande, mais que le rayon osculateur AI , est d'une grandeur finie; car si on prenoit DB proportionnelle à AD^3 , aucun cercle ne pourroit passer par le point A entre la tangente AD & la courbe AB ; & en ce cas l'angle de contact seroit infiniment plus petit que les angles de contact circulaires; & par le même raisonnement, si on fait successivement DB proportionnel à AD^4, AD^5, AD^6, AD^7 , &c. on aura une série infinie d'angles de contact, dont chacun sera infiniment plus petit que celui qui le précède, & si l'on fait successivement BD proportionnelle à $AD^2, AD^{\frac{3}{2}}, AD^{\frac{4}{3}}, AD^{\frac{5}{4}}, AD^{\frac{6}{5}}, AD^{\frac{7}{6}}$, &c. on aura une autre suite infinie d'angles de contact, dont le premier sera du même genre que les angles de contact circulaires; le second sera infiniment plus grand; le troisième infiniment plus grand que le second, & ainsi de suite. De plus, entre deux quelconque de ces angles on peut inférer une suite d'angles intermédiaire, laquelle sera infinie des deux côtés, & telle que chacun des angles qui la composeront sera infiniment plus grand, ou infiniment plus petit que celui qui le précède. Entre les termes AD^2 & AD^3 , par exemple, on peut inférer la série $AD^{\frac{11}{6}}, AD^{\frac{11}{5}}, AD^{\frac{9}{4}}, AD^{\frac{7}{3}}, AD^{\frac{5}{2}}, AD^{\frac{8}{3}}, AD^{\frac{11}{4}}, AD^{\frac{14}{5}}, AD^{\frac{17}{6}}$, &c. Enfin on pourra encore inférer entre deux angles quelconques de cette dernière série, une nouvelle série d'angles intermédiaires toujours infiniment plus grands les uns que les autres; car la nature ne connoît point de bornes.

Ce qu'on a démontré des lignes courbes & des superficies qu'elles renferment, peut s'appliquer facilement aux surfaces

courbes des solides & aux solides mêmes. J'ai commencé par ces Lemmes ; pour éviter de déduire de longues démonstrations *ad absurdum*, selon la méthode des anciens Géomètres.

J'aurois eu des démonstrations plus courtes par la méthode des indivisibles ; mais parce que l'hypothèse des indivisibles me paroît trop dure à admettre , & que cette méthode est par conséquent peu géométrique ; j'ai mieux aimé employer celle des premières & dernières raisons des quantités qui naissent & s'évanouissent ; & j'ai commencé par faire voir , le plus brièvement que j'ai pu , ce que deviennent les quantités , lorsqu'elles atteignent leurs limites. Je démontrerai par cette méthode tout ce qu'on démontré par celle des indivisibles ; mais en ayant prouvé le principe , je m'en servirai avec plus de sécurité.

Ainsi , lorsque dans la suite je considérerai des quantités comme composées de particules déterminées , & que je prendrai pour des lignes droites de petites portions de courbes ; je ne désignerai point par-là des quantités indivisibles , mais des quantités divisibles évanouissantes ; de même , ce que je dirai des sommes & des raisons , doit toujours s'entendre non des particules déterminées , mais des limites des sommes & des raisons des particules évanouissantes ; & pour sentir la force de mes démonstrations , il faudra toujours se rappeler la méthode que j'ai suivie dans les Lemmes précédens.

On peut dire , contre ce principe des premières & dernières raisons , que les quantités qui s'évanouissent n'ont point de dernière proportion entr'elles ; parce qu'avant de s'évanouir , la proportion qu'elles ont n'est pas la dernière , & que lorsqu'elles sont évanouies , elles n'en ont plus aucune. Mais on pourroit soutenir par le même raisonnement qu'un corps qui parvient d'un mouvement uniformément retardé à un certain lieu où son mouvement s'éteint , n'a point de dernière vitesse ; Car , diroit-on , avant que ce corps soit parvenu à ce lieu , il n'a pas encore sa dernière vitesse , & quand il l'a atteint , il n'en a aucune , puisqu'alors son mouvement est éteint. Or , la réponse à cet argument est facile ;

on doit entendre par la dernière vitesse de ce corps celle avec laquelle il se meut, non pas avant d'avoir atteint le lieu où son mouvement cesse, non pas après qu'il a atteint ce lieu, mais celle qu'il a dans l'instant même qu'il atteint ce dernier lieu & avec laquelle son mouvement cesse. Il en est de même de la dernière raison des quantités évanouissantes, il faut entendre par cette raison celles qu'ont entr'elles des quantités qui diminuent, non pas avant de s'évanouir, ni après qu'elles sont évanouies; mais celle qu'elles ont dans le moment même qu'elles s'évanouissent. De la même manière, la première raison des quantités naissantes est celle que les quantités qui augmentent ont au moment qu'elles naissent, & la première ou dernière somme de ces quantités est celle qui répond au commencement ou à la fin de leur existence, c'est-à-dire, au moment qu'elles commencent à augmenter ou qu'elles cessent de diminuer.

Il y a une certaine borne que la vitesse d'un corps peut atteindre à la fin de son mouvement, & qu'elle ne sauroit passer; c'est cette vitesse qui est la dernière vitesse du corps. Il en est de même des limites & des proportions de toutes les quantités qui commencent & cessent. Comme cette limite est certaine & définie, c'est un problème très géométrique que de la déterminer; car on peut regarder comme géométriques tous les problèmes où il s'agit de déterminer avec précision quelque quantité.

On objectera peut-être que si les dernières raisons qu'ont entr'elles les quantités qui s'évanouissent sont données, les dernières grandeurs de ces quantités seront aussi données; & qu'ainsi toute quantité sera composée d'indivisibles, au contraire de ce qu'*Euclide* a démontré des incommensurables dans le dixième Livre de ses élémens. Mais cette objection porte sur une supposition fautive; car les dernières raisons qu'ont entr'elles les quantités qui s'évanouissent ne sont pas en effet les raisons des dernières quantités, ou de quantités déterminées & indivisibles, mais les limites dont les raisons des quantités qui décroissent à l'infini approchent

sans

sans cesse, limites dont elles peuvent toujours approcher plus près que d'aucune différence donnée, qu'elles ne peuvent jamais passer, & qu'elles ne sauroient atteindre, si ce n'est dans l'infini.

LIVRE
PREMIER.

On comprendra ceci plus clairement dans les quantités infiniment grandes. Si deux quantités, dont la différence est donnée, augmentent à l'infini, leur dernière raison sera donnée, & sera certainement la raison d'égalité; cependant les dernières, ou les plus grandes quantités auxquelles répond cette raison, ne seront point des quantités données. Donc, lorsque je me servirai dans la suite, pour être plus clair, des mots de *quantités évanouissantes*, de *quantités dernières*, de *quantités très petites*, il ne faut pas entendre par ces expressions des quantités d'une grandeur déterminée, mais toujours des quantités qui diminuent à l'infini.

SECONDE SECTION.

De la recherche des forces centripètes.

PROPOSITION I. THÉOREME I.

*Dans les mouvemens curvilignes des corps, les aires décrites * autour d'un centre immobile, sont dans un même plan immobile, & sont proportionnelles au temps.*

Supposé que le temps soit divisé en parties égales, & que dans la première partie de ce temps, le corps, par la force qui lui a été imprimée, décrive la ligne AB : suivant la première loi du mouvement dans un second temps égal au premier, il décrirait, si rien ne l'en empêchoit, la droite $BC = AB$; Donc en tirant au centre S , les rayons AS , BS , cS , les aires ASB , $BS c$ seroient égales. Supposé que lorsque ce corps est arrivé en B , la force

Fig. 23.

* Les aires décrites par un corps autour d'un centre sont les espaces terminés par les rayons qui partent de ce centre, & par l'arc sur lequel s'appuient ces rayons.

centripete agisse sur lui par un seul coup , mais assez puissant pour l'obliger à se détourner de la droite Bc & à suivre la droite BC . Si on tire la ligne Cc parallèle à BS , laquelle rencontre BC en C , à la fin de ce second temps, le corps (selon le 1. Corollaire des loix) sera en C dans le même plan que le triangle ASB .

En tirant ensuite la ligne SC , le triangle $SB C$ sera égal au triangle $SB c$, à cause des parallèles SB , Cc , donc il sera aussi égal au triangle SAB .

De même , si la force centripete agit successivement sur le corps en C , D , E , &c. & qu'elle lui fasse décrire à chaque petite portion de temps les droites CD , DE , EF , &c. ces lignes seront toutes dans le même plan ; & le triangle SCD sera égal au triangle $SB C$, le triangle SDE au triangle SCD , & le triangle SEF au triangle SDE . Ce corps décrira donc en des temps égaux des aires égales dans un plan immobile : & en composant , les sommes des aires quelconques $SADS$, $SAFS$ seront entr'elles comme les temps employés à les décrire.

Qu'on imagine maintenant que le nombre des triangles augmente & que leur largeur diminue à l'infini ; il est clair (par le Cor. 4. du Lemme 3.) que leur dernier périmètre ADF , sera une ligne courbe. Donc la force centripete, qui retire le corps à tout moment de la tangente de cette courbe, agit sans interruption , & les aires quelconques $SADS$, $SAFS$, qui étoient proportionnelles aux temps employés à les décrire , leur seront encore proportionnelles dans ce cas. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. La vitesse d'un corps attiré vers un centre immobile dans un espace non résistant , est réciproquement comme la perpendiculaire tirée de ce centre à la ligne qui touche la courbe au lieu où le corps se trouve ; car la vitesse de ce corps aux lieux A , B , C , D , E , est proportionnelle aux bases AB , BC , CD , DE , EF des triangles égaux ; & ces bases sont entr'elles en raison réciproque des perpendiculaires qui leur sont abaissées du centre.

Cor. 2. Si on fait un parallélogramme $ABCV$, sur les cordes AB , BC , de deux arcs successivement parcourus par le même corps en des temps égaux dans des espaces non résistans, & que la diagonale BV de ce parallélogramme ait la même position que celle qu'elle a à la fin, lorsque ces arcs diminuent l'infini, cette diagonale prolongée passera par le centre des forces.

Cor. 3. Si on fait les parallélogrammes $ABCV$, $DEFZ$, sur les cordes AB , BC & DE , EF des arcs décrits en temps égaux dans des espaces non résistans, les forces en B & en E feront entr'elles dans la dernière raison des diagonales BV , EZ , lorsque ces arcs diminueront à l'infini; car les mouvemens du corps, suivant les lignes BC & EF , sont composés (par le Cor. 1. des loix) des mouvemens suivant les lignes Bc , BV & Ef , EZ : or, BV & EZ , qui sont égales à Cc , & à Ff , ont été parcourues par les impulsions de la force centripète en B & en E , selon ce qui a été démontré dans cette proposition; donc elles sont proportionnelles à ces impulsions.

Cor. 4. Les forces par lesquelles les corps, qui se meuvent dans des espaces libres, sont détournés du mouvement rectiligne & contraints à décrire des courbes, sont entr'elles comme les flèches des arcs évanouissans parcourus en temps égaux, & ces flèches convergent vers le centre des forces, & coupent les cordes des arcs évanouissans en deux parties égales; car ces flèches sont la moitié des diagonales dont on vient de parler dans le Cor. 3.

Cor. 5. Ainsi ces mêmes forces sont à la force de la gravité, comme les flèches des arcs décrits sont aux flèches verticales des arcs paraboliques que les projectiles décrivent dans le même temps.

Cor. 6. Tout ce qui a été démontré jusqu'ici fera encore vrai, par le Cor. 5. des loix, lorsque les plans dans lesquels les corps se meuvent, & les centres des forces placés dans ces plans, au lieu d'être en repos, se mouveront uniformément en ligne droite.

La force centripète d'un corps qui se meut dans une ligne courbe décrite sur un plan, & qui parcourt autour d'un point immobile, ou mû uniformément en ligne droite, des aires proportionnelles au temps, tend nécessairement à ce point.

Cas 1. Tout corps qui se meut dans une courbe est détourné du mouvement rectiligne par une force qui agit sur lui, par la première loi; & cette force qui contraint le corps à se détourner de la ligne droite, & à décrire en temps égaux les petits triangles égaux SAB , SBC , SCD , &c. autour du point immobile S , agit au lieu B suivant une ligne parallèle à cC , par la seconde loi, c'est-à-dire, suivant la ligne BS ; & au lieu C suivant une ligne parallèle à dD , c'est-à-dire suivant la ligne SC , &c. Elle agit donc toujours selon des lignes qui tendent à ce point immobile S . *C. Q. F. D.*

Cas. 2. Et par le Corollaire 5. des loix, le mouvement du corps est le même, soit que la superficie dans laquelle s'exécute ce mouvement soit en repos, soit qu'elle se meuve uniformément en ligne droite en emportant avec elle le centre, la courbe décrite, & le corps décrivant.

Cor. 1. Dans les espaces ou milieux non résistans, si les aires ne sont pas proportionnelles au temps, les forces centripètes ne tendent pas au concours des rayons; mais elles déclinent vers le côté vers lequel le corps se meut si la description des aires est accélérée; & elles déclinent vers le côté opposé si elle est retardée.

Cor. 2. Dans les milieux résistans, si la description des aires est accélérée, les directions des forces déclinent aussi vers le côté vers lequel le mouvement du corps est dirigé.

S C H O L I E.

Le corps peut être animé par une force centripète composée de plusieurs forces. Dans ce cas, le sens de la Proposition précé-

dente est, que la force qui résulte de toutes les autres tend au point *S*. De plus, si quelqu'autre force agit continuellement selon une ligne perpendiculaire à la superficie décrite, le corps se détournera du plan de son mouvement; mais la quantité de la superficie décrite n'augmentera ni ne diminuera, ainsi on peut la négliger dans la composition des forces.

PROPOSITION III. THÉOREME III.

Si un corps décrit autour d'un autre corps qui se meut d'une façon quelconque des aires proportionnelles au temps, la force qui anime le premier est composée d'une force qui tend vers le second, & de toute la force accélératrice par laquelle ce second corps est animé.

Soit le premier corps *L* & le second *T*: Si une force nouvelle égale & contraire à celle qui agit sur le corps *T*, agit sur ces deux corps, selon des lignes parallèles, le premier corps *L* continuera, par le Cor. 6. des loix, à décrire autour du corps *T* les mêmes aires qu'auparavant; mais la force qui agissoit sur le corps *T* fera détruite par cette nouvelle force qu'on a supposé lui être égale & contraire. Donc, par la première loi, ce corps *T* abandonné à lui-même demeurera en repos, ou se mouvra uniformément en ligne droite; & le corps *L*, qui est animé alors par la différence de ces forces, c'est-à-dire par la force restante, continuera à décrire des aires proportionnelles au temps autour du corps *T*. Donc par le Théor. 2. la différence de ces forces tend vers le corps *T* comme à son centre. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Il suit de-là, que si un corps *L* décrit autour d'un autre corps des aires proportionnelles au temps, & que de la force totale qui presse le corps *L*, soit simple, soit composée de plusieurs forces, selon le Cor. 2. des loix, on soustrait toute la force accélératrice qui agit sur l'autre corps; la force restante par laquelle le corps *L* est animé, tendra tout entière vers l'autre corps *T* comme centre.

Cor. 2. Et si ces aires ne s'éloignent pas beaucoup d'être pro-

proportionnelles au temps, la force restante sera à peu près dirigée vers le corps T .

Cor. 3. Et réciproquement, si la force restante tend à peu près vers le corps T , les aires seront à peu près proportionnelles au temps.

Cor. 4. Si le corps L décrit autour du corps T des aires qui s'éloignent beaucoup de la proportionnalité des temps, & que ce corps T soit en repos, ou qu'il se meuve uniformément en ligne droite, la force centripète qui tend vers ce corps est nulle, ou bien elle est mêlée & composée avec d'autres forces très puissantes; & la force totale, composée de toutes ces forces, s'il y en a plusieurs, sera dirigée vers un autre centre mobile ou immobile. Il en est de même, lorsque le corps T se meut d'un mouvement quelconque, pourvu que l'on prenne pour force centripète, celle qui reste après qu'on a soustrait la force totale qui agit sur le corps T .

S C H O L I E.

Comme la description des aires égales en temps égaux marque que le corps qui décrit ces aires éprouve l'action d'une force qui agit sur lui, qui le retire du mouvement rectiligne, & qui le retient dans son orbite; pourquoi ne prendrions-nous pas dans la suite cette description égale des aires pour l'indice d'un centre autour duquel se fait tout mouvement circulaire dans des espaces non résistans?

PROPOSITION IV. THÉOREME IV.

Les corps qui parcourent uniformément différens cercles sont animés par des forces centripètes qui tendent au centre de ces cercles, & qui sont entr'elles comme les quarrés des arcs décrits en temps égal, divisés par les rayons de ces cercles.

Ces forces tendent au centre des cercles par la Proposition 2. & le Corollaire 2. de la Proposition 1. & elles sont entr'elles, par

le Corollaire 4. de la Proposition 1. comme les sinus versés des arcs décrits dans de très petits temps égaux, c'est-à-dire par le Lemme 7. comme les quarrés de ces mêmes arcs divisés par les diamètres de leurs cercles. Or, comme ces petits arcs sont proportionnels aux arcs décrits dans des temps quelconques égaux, & que les diamètres sont comme les rayons, les forces seront comme les quarrés des arcs quelconques décrits dans des temps égaux divisés par les rayons. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Comme ces arcs sont proportionnels aux vitesses des corps, les forces centripètes seront en raison composée de la raison doublée des vitesses directement, & de la raison simple des rayons inversement.

Cor. 2. Et comme les temps périodiques sont en raison composée de la raison directe des rayons, & de la raison inverse des vitesses; les forces centripètes seront en raison composée de la raison directe des rayons, & de la raison doublée inverse des temps périodiques.

Cor. 3. Donc, si les temps périodiques sont égaux, & que les vitesses soient par conséquent comme les rayons; les forces centripètes seront aussi comme les rayons: & au contraire.

Cor. 4. Si les temps périodiques & les vitesses sont en raison sousdoublée des rayons; les forces centripètes seront égales entre elles: & au contraire.

Cor. 5. Si les temps périodiques sont comme les rayons, & que par conséquent les vitesses soient égales, les forces centripètes seront en raison renversée des rayons: & au contraire.

Cor. 6. Si les temps périodiques sont en raison sesquiplée des rayons, & que par conséquent les vitesses soient réciproquement en raison sousdoublée des rayons; les forces centripètes seront réciproquement comme les quarrés des rayons: & au contraire.

Cor. 7. Et généralement, si le temps périodique est comme une puissance quelconque R^n du rayon, & que par conséquent la

vitesse soit réciproquement comme la puissance R^{n-1} du rayon ; la force centripète sera réciproquement comme la puissance R^{2n-1} du rayon : & au contraire.

Cor. 8. On peut trouver de la même manière tout ce qui concerne les temps, les vitesses & les forces avec lesquelles les corps décrivent des parties semblables de figures quelconques semblables, qui ont leurs centres posés de même dans ces figures ; il ne faut pas pour ces cas d'autres démonstrations que les précédentes, pourvu qu'on substitue la description égale des aires au mouvement uniforme, & qu'on mette les distances des corps aux centres à la place des rayons.

Cor. 9. Il suit aussi de la même démonstration, que l'arc qu'un corps décrit pendant un temps quelconque en tournant uniformément dans un cercle en vertu d'une force centripète donnée, est moyen proportionnel entre le diamètre de ce cercle & la ligne que le corps parcoureroit en tombant par la même force donnée & pendant le même temps.

S C H O L I E.

Le cas du Corollaire 6. est celui des corps célestes, (comme nos Compatriotes *Hook*, *Wren* & *Halley* l'ont chacun conclu des observations) c'est pourquoi j'expliquerai fort au long dans la suite de cet Ouvrage tout ce qui a rapport à la force centripète qui décroît en raison doublée des distances au centre.

De plus, par la Proposition précédente & par ses Corollaires, on peut trouver la proportion qui est entre la force centripète & une force quelconque connue, telle que la gravité ; car si le corps tourne dans un cercle concentrique à la terre par la force de la gravité, la gravité fera sa force centripète : or, connoissant d'un côté la descente des graves, & de l'autre le temps de la révolution, & l'arc décrit dans un temps quelconque, on aura par le Corollaire 9. de cette Proposition la proportion cherchée entre la gravité & la force centripète. C'est par des propositions semblables

bles que M. *Hugens*, dans son excellent *Traité de Horologio oscillatorio*, a comparé la force de la gravité avec les forces centrifuges des corps qui circulent.

On pourroit encore démontrer cette proposition de cette manière. Soit supposé un Polygone d'un nombre de côtés quelconques inscrit dans un cercle. Si le corps, en parcourant les côtés de ce Polygone avec une vitesse donnée, est réfléchi par le cercle à chacun des angles de ce Polygone, la force avec laquelle ce corps frappe le cercle à chaque réflexion sera comme la vitesse : donc la somme des forces en un temps donné sera comme cette vitesse multipliée par le nombre des réflexions, c'est-à-dire, (si le Polygone est donné d'espèce) comme la ligne parcourue dans ce temps, laquelle doit être augmentée ou diminuée dans la raison qu'elle a elle-même au rayon de ce cercle ; c'est-à-dire, comme le carré de cette ligne divisé par le rayon : ainsi si les côtés du Polygone diminuant à l'infini, le Polygone vient à coïncider enfin avec le cercle, la somme des forces sera alors comme le carré de l'arc parcouru dans un temps donné divisé par le rayon. C'est là la mesure de la force centrifuge avec laquelle le corps presse le cercle ; & cette force est égale & contraire à la force par laquelle ce cercle repousse continuellement le corps vers le centre.

PROPOSITION V. PROBLÈME I.

Trouver le point auquel tendent comme centre des forces qui font parcourir une courbe donnée, lors qu'on connoît la vitesse du corps à chaque point de cette courbe.

Que les lignes PT , TQ , VR , qui se rencontrent aux points T & V , touchent la courbe donnée dans les points P , Q , R , que l'on mène ensuite par ces points & perpendiculairement aux tangentes les droites PA , QB , RC , réciproquement proportionnelles aux vitesses dans les mêmes points ; c'est-à-dire, de sorte que PA soit à QB comme la vitesse au point Q est à la vitesse au point P , & que QB soit à RC comme la vitesse au point R à la vitesse

Fig. 14.

au point Q . Cela fait, soient menées à angles droits par les extrémités A, B, C , de ces perpendiculaires les lignes AD, DBE, EC , qui se rencontrent en D & en E : & en tirant les lignes TD, VE , elles se rencontreront au centre cherché S .

Car les perpendiculaires tirées du centre S aux tangentes PT, QT sont (par le Cor. 1. de la Prop. 1.) réciproquement comme les vitesses du corps aux points P & Q ; donc par la construction elles seront comme les perpendiculaires AP, BQ directement, c'est-à-dire, comme les perpendiculaires abaissées du point D sur ces tangentes. D'où l'on tire facilement, que les points S, T, D sont dans une même ligne droite. On prouvera par le même raisonnement que les points S, E, V sont aussi dans une même ligne droite; donc le centre S se trouvera dans l'intersection des lignes TD, VE . C. Q. F. D.

PROPOSITION VI. THÉORÈME V.

Si un corps décrit autour d'un centre immobile un orbe quelconque dans un espace non résistant, & qu'on suppose que la flèche de l'arc naissant que ce corps parcourt dans un temps infiniment petit, & qui partage sa corde en deux parties égales, passe, étant prolongée par le centre des forces: la force centripète dans le milieu de l'arc sera en raison directe de cette flèche, & en raison doublée inverse du temps.

Par le Cor. 4. de la Prop. 1. la flèche dans un temps donné est comme la force; donc, en augmentant le temps en une raison quelconque, la flèche (par les Cor. 2. & 3. du Lemme 11.) augmentera dans la raison doublée du temps; car l'arc augmente en même raison que le temps, donc la flèche est en raison simple de la force, & en raison doublée du temps, & soustrayant de part & d'autre la raison doublée du temps, la force sera en raison directe de la flèche, & en raison doublée inverse du temps. C. Q. F. D.

On pourroit aussi démontrer facilement cette Proposition par le Cor. 4. du Lemme 10.

Cor. 1. Si le corps P en tournant autour du centre S décrit la courbe APQ , & que cette courbe soit touchée par la ligne ZPR en un point quelconque P , que d'un autre point quelconque Q de cette courbe, on tire QR parallèle à SP , & qu'on abaisse QT perpendiculaire sur SP : la force centripète sera réciproquement comme la quantité que devient $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$ lorsque les points P & Q coïncident; car QR est égale à la flèche de l'arc double de QP , dont le milieu est P , & le double du triangle SQP ou $SP \times QT$ est proportionnel au temps dans lequel cet arc double est décrit; ainsi on peut l'écrire à la place de ce temps.

Cor. 2. On prouvera par le même raisonnement que la force centripète est réciproquement comme la quantité $\frac{SY^2 \times QP^2}{QR}$ pourvu que SY soit abaissée perpendiculairement du centre des forces sur la tangente PR de l'orbite; car les rectangles $SY \times QP$ & $SP \times QT$ sont égaux.

Cor. 3. Si l'orbe PQ est un cercle dont la droite PV , qui passe par le corps & par le centre des forces, soit une corde, ou que cet orbe PQ ait pour cercle osculateur le cercle dont la corde est PV , la force centripète sera réciproquement comme la quantité $SY^2 \times PV$; car dans cette supposition $PV = \frac{QP^2}{QR}$

Cor. 4. Les mêmes choses étant posées, la force centripète est dans la raison doublée directe de la vitesse, & dans la raison inverse de la corde PV ; car par le *Cor. 1.* de la *Propos. 1.* la vitesse est réciproquement comme la perpendiculaire SY .

Cor. 5. Donc, si on a une figure curviligne quelconque APQ , & dans cette figure un point donné S , vers lequel la force centripète soit perpétuellement dirigée, on pourra trouver la loi de la force centripète, par laquelle un corps quelconque P sera retiré à tout moment du mouvement rectiligne & retenu dans

DU MOUVEMENT DES CORPS. le périmètre de cette figure, en cherchant la valeur du solide $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$, ou celle du solide $SY^2 \times PV$, qui sont réciproquement proportionnels à cette force. Nous en donnerons des exemples dans les Problèmes suivans.

PROPOSITION VII. PROBLÈME II.

Trouver la loi de la force centripète qui tend à un point donné, & qui fait décrire à un corps la circonférence d'un cercle.

Fig. 16. Soient $VQPA$ la circonférence du cercle; S le point donné vers lequel la force fait tendre le corps comme à son centre; P un lieu quelconque où l'on suppose le corps arrivé; Q le lieu consécutif; PRZ la tangente du cercle au point P ; & PV la corde qui passe par S . Soient de plus VA le diamètre qui passe par V ; AP la corde tirée de A à P ; QT une perpendiculaire à PV , laquelle étant prolongée rencontre la tangente PR en Z ; RL la parallèle à PV qui passe par Q , & qui rencontre le cercle en L , & la tangente PZ en R .

Cela posé, à cause des triangles semblables ZQR , ZTP , VPA ; on aura RP^2 , c'est-à-dire, $QR \times RL : QT^2 :: AV^2 : PV^2$; donc $\frac{QR \times RL \times PV^2}{AV^2} = QT^2$; multipliant présentement cette équation

par $\frac{SP^2}{QR}$, & écrivant PV au lieu de RL , ce qui est permis lorsque les points P & Q coïncident, on aura $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2} = \frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$

donc, par les Corol. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripète sera réciproquement comme $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$ c'est-à-dire, à cause que AV^2 est donné, réciproquement comme le quarré de la distance ou hauteur SP multipliée par le cube de la corde PV . C. Q. E. T.

AUTRE SOLUTION.

Soit menée la perpendiculaire SY sur la tangente PR prolongée; à cause des triangles semblables SYP , VPA , on aura

$AV:PV::SP:SY$. Donc $\frac{SP \times PV}{AV} = SY$, & $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$ LIVRE
PREMIER
 $= SY^2 \times PV$. Donc par les Cor. 3. & 5. de la Prop. 6. la force centripète est réciproquement comme $\frac{SP^2 \times PV^3}{AV^2}$, c'est-à-dire, à cause que AV est donnée, réciproquement comme $SP^2 \times PV^3$. C. Q. F. T.

Cor. 1. Donc, si le point donné S , auquel la force centripète tend sans cesse, se trouve dans la circonférence de ce cercle, comme en V ; la force centripète sera réciproquement comme la cinquième puissance de la hauteur SP .

Cor. 2. La force par laquelle le corps P décrit le cercle $APTV$ Fig. 17. autour du centre S des forces, est à la force par laquelle ce même corps P peut tourner dans le même tems périodique & dans le même cercle autour d'un autre centre quelconque de forces R , comme $SP \times RP^2$ à SG^3 , SG étant une droite menée parallèlement à RP , & terminée par la tangente PG .

Car par la construction, la première force est à la dernière comme $RP^2 \times PT^3$ à $SP^2 \times PV^3$ c'est-à-dire, comme $SP \times PR^2$ à $\frac{SP^3 \times PV^3}{PT^3}$, ou bien, à cause des triangles semblables PSG, TPV , comme $SP \times PR^2$ à SG^3 .

Cor. 3. La force par laquelle le corps P circule dans un orbe quelconque autour d'un centre de forces S , est à la force, par laquelle ce même corps P peut circuler dans le même tems périodique & dans le même orbe autour d'un autre centre quelconque R de forces, comme $SP \times RP^2$ à SG^3 , c'est-à-dire, comme la distance du corps au premier centre des forces S , multipliée par le quarré de la distance au second centre R , est au cube de la ligne SG tirée du premier centre S parallèlement à la distance du second centre, & terminée par la tangente PG de l'orbite. Car les forces dans cet orbe sont les mêmes à un de ses points quelconques P , que dans le cercle qui a la même courbure.

PROPOSITION VIII. PROBLÈME III.

On demande la loi de la force centripète dans le cas où le corps décrivant un demi-cercle PQA tend continuellement vers un point S fi éloigné, que toutes les lignes PS, RS tirées à ce point peuvent être regardées comme parallèles.

Fig. 18.

Par le centre C de ce demi cercle, soit tiré le demi diamètre CA coupé perpendiculairement en M & en N par les directions de la force centripète. Tirant CP , on aura, à cause des triangles semblables, CPM , PZT & RZQ , $CP^2 : PM^2 :: PR^2 : QT^2$ & par la nature du cercle $PR^2 = QR \times RN + QN^2$ (les points Q & P coïncidant) $QR \times PM$. Donc $CP^2 : PM^2 :: QR \times PM : QT^2$ donc $\frac{QT^2}{QR} = \frac{PM^3}{CP^2}$ & $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR} = \frac{PM^3 \times SP^2}{CP^2}$; donc, par les Corol. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripète est réciproquement comme $\frac{PM^3 \times SP^2}{CP^2}$, c'est-à-dire (en négligeant la raison déterminée de $\frac{SP^2}{CP^2}$) réciproquement comme PM^3 .
C. Q. F. T.

On tireroit facilement la même chose de la Proposition précédente.

S C H O L I E.

Par un raisonnement à peu près semblable, on trouveroit que si le corps décrivait une ellipse, une hiperbole, ou une Parabole; en vertu d'une force centripète dirigée à un point très-éloigné, cette force centripète seroit encore réciproquement comme le cube de l'ordonnée qui tend à ce point.

PROPOSITION IX. PROBLÈME IV.

Supposé que le corps tourne dans une spirale PQS. qui coupe tous les rayons SP, SQ, &c. sous un angle donné: on demande la loi de la force centripète qui tend au centre de cette spirale.

Fig. 19.

Soit supposé constant l'angle indéfiniment petit PSQ , la figure

$SPRQT$, ayant tous les angles constans, sera donnée d'espece;

donc $\frac{QT}{QR}$ sera donnée aussi; donc $\frac{QT^2}{QR}$ sera comme SP , parce-

LIVRE
PREMIER.

que, comme on vient de le dire, $SPRQT$ est donnée d'espece.

Supposons présentement que l'angle PSQ change selon une loi quelconque, la droite QR qui soutient l'angle de contact QPR changera, par le Lemme 11. en raison doublée de PR ou de QT . De-là il suit, que la raison de $\frac{QT^2}{QR}$ demeurera la même

qu'auparavant, c'est-à-dire qu'elle sera encore comme SP . C'est pourquoi $\frac{QT^2 \times SP^2}{QR}$ sera comme SP^3 ; donc par les Corol. 1.

& 5. de la Prop. 6. la force centripete sera réciproquement proportionnelle au cube de la distance SP . C. Q. F. T.

AUTRE SOLUTION.

La perpendiculaire SY abaissée sur la tangente, & la corde PV du cercle osculateur étant en raison donnée avec SP , SP^2 est proportionnel à $SY^2 \times PV$, c'est-à-dire, par les Cor. 3. & 5. de la Prop. 6. réciproquement proportionnel à la force centripete.

LEMME XII.

Tous les parallélogrammes décrits autour des diametres quelconques conjugués d'une ellipse ou d'une hyperbole donnée sont égaux entr'eux.

Cette Proposition est claire par les Coniques.

PROPOSITION X. PROBLÈME V.

Un corps circulant dans une ellipse : on demande la loi de la force centripete qui tend au centre de cette ellipse.

Soient CA, CB les demi axes de l'ellipse; GP, DK d'autres diametres conjugués; PF, QT des perpendiculaires à ces diametres; Qv une ordonnée au diametre GP ; si on acheve le parallélogramme $QvPR$, on aura par les coniques $Pv \times vG : Qv^2 ::$

Fig. 10.

$PC^2 : CD^2$. Mais à cause des triangles semblables QvT , PCF , $Qv^2 : QT^2 :: PC^2 : PF^2$. Donc, en composant ces raisons, on aura $Pv \times vG : QT^2 :: PC^2 : CD^2$, & $PC^2 : PF^2$, ou $vG : \frac{QT^2}{Pv} :: PC^2 : \frac{CD^2 \times PF^2}{PC^2}$. Si on écrit présentement QR pour Pv , que l'on mette, à cause du Lemme 12. $BC \times CA$ à la place de $CD \times PF$, & que l'on suppose vG égale à $2PC$, ainsi qu'on le doit lorsque les points P & Q coïncident, on aura, en multipliant les extrêmes & les moyens, $\frac{QT^2 \times PC^2}{QR} = \frac{2BC^2 \times CA^2}{PC}$. Donc, par le Cor. 5. de la Prop. 6. la force centripète sera réciproquement comme $\frac{2BC^2 \times AC^2}{PC}$; c'est-à-dire, à cause que $2CB^2 \times CA^2$ est donnée, réciproquement comme $\frac{1}{PC}$; ou, ce qui revient au même, directement comme la distance PC . C. Q. F. T.

AUTRE SOLUTION.

Sur la droite PG de l'autre côté du point T par rapport à P , soit pris le point u en sorte que $Tu = Tv$. Soit pris ensuite uV à vG , comme DC^2 à PC^2 . Puisque les coniques donnent $Qv^2 : Pv \times vG :: DC^2 : PC^2$, on aura $Qv^2 = Pv \times uV$, & ajoutant le rectangle $uP \times Pv$ de part & d'autre, il est clair que le carré de la corde de l'arc PQ sera égal au rectangle $Vp \times Pv$; donc le cercle qui touche la section conique en P & qui passe par le point Q passera aussi par le point V . Supposiez à présent que les points P & Q se confondent, la raison de uV à vG , qui est la même que la raison de DC^2 à PC^2 , deviendra la raison de PV à PG ou de PV à $2PC$; donc $PV = \frac{2DC^2}{PC}$, donc, par le Cor. 3. de la Prop. 6. la force par laquelle le corps P fait sa révolution dans l'ellipse, sera réciproquement comme $\frac{2DC^2}{PC} \times PF^2$, c'est-à-dire,

à cause que $2 DC^2 \times PF^2$ est donné, que cette force sera directement comme PC. C. Q. F. T.

LIVRE
PREMIER.

Cor. 1. La force est donc comme la distance du corps au centre de l'ellipse : & réciproquement, si la force est comme la distance, le corps décrira ou une ellipse dont le centre sera le même que le centre des forces, ou le cercle dans lequel l'ellipse peut se changer.

Cor. 2. Les temps périodiques des révolutions qui se font autour du même centre sont égaux dans toutes les ellipses; car ces temps sont égaux dans les ellipses semblables (par les Cor. 3. & 8. de la Prop. 4.); mais dans les ellipses qui ont le grand axe commun, ils sont les uns aux autres directement comme les aires elliptiques totales, & inversement comme les particules de ces aires décrites en temps égal, c'est-à-dire directement comme les petits axes, & inversement comme les vitesses des corps dans les sommets principaux, ou directement comme les petits axes, & inversement comme les ordonnées au même point de l'axe commun. Mais ces deux raisons directes & inverses qui composent la raison des temps sont alors égales; donc les temps sont égaux.

S C H O L I E.

Si le centre de l'ellipse s'éloigne à l'infini, & qu'elle devienne une parabole, le corps se mouvra dans cette parabole; & la force tendant alors à un centre infiniment distant, elle deviendra uniforme. C'est le cas traité par *Galilée*. Si (en changeant l'inclinaison du plan au cône coupé) la parabole se change en une hyperbole, le corps se mouvra dans le périmètre de cette hyperbole, la force centripète se changeant alors en force centrifuge; & de même que dans le cercle ou l'ellipse, si les forces tendent au centre de la figure placé sur l'abscisse, en augmentant ou diminuant les ordonnées en une raison donnée quelconque, ou en changeant l'angle d'inclinaison des ordonnées sur l'abscisse, ces forces augmenteront ou diminueront toujours en raison des dif-

tances au centre, pourvu que les temps périodiques demeurent égaux : ainsi dans toutes les courbes, si les ordonnées augmentent ou diminuent dans une raison donnée quelconque, ou que l'angle de ces ordonnées change d'une façon quelconque, le temps périodique & le centre des forces, qu'on suppose placé à volonté sur l'abscisse, demeurans les mêmes, les forces centripètes aux extrémités des ordonnées correspondantes seront entr'elles comme les distances au centre.

TROISIÈME SECTION.

Du mouvement des corps dans les Sections coniques excentriques.

PROPOSITION XI. PROBLEME VI.

Un corps faisant sa révolution dans une ellipse ; on demande la loi de la force centripète, lorsqu'elle tend à un de ses foyers.

Fig. 21.

Soient S le foyer de l'ellipse, E la rencontre de SP avec le diamètre DK , x celle de la même ligne SP avec l'ordonnée QV , $QxPR$ le parallélogramme fait sur Px & Qx . On voit d'abord que EP est égale au demi grand axe AC ; car menant par l'autre foyer H la droite HI parallèle à DK , il est clair que EI sera égale à SE à cause de l'égalité qui est entre CH & CS , & par conséquent PE sera égale à la moitié de la somme de PI & de PS , ou, ce qui revient au même, à AC , moitié de la somme de PS & de PH , puisqu'il s'agit de ce que HI est parallèle à RP , & de ce que les angles HPZ & IPR sont égaux, que $HP = PI$. Abaisant ensuite QT perpendiculaire à SP , & nommant L le paramètre du grand axe, c'est-à-dire $\frac{2BC^2}{AC}$; on verra que $L \times QR : L \times Pv :: QR : Pv$, c'est-à-dire $:: PE$ ou $AC : PC$; mais $L \times Pv : Gv \times vP :: L : Gv$ & $Gv \times vP : Qv^2 :: PC^2 : CD^2$; de plus, $Qv^2 : Qx^2$ en raison d'égalité (Cor. 2. Lem. 7.)

lorsque les points P & Q coïncident, & Qx^2 ou $Qv^2 : QT^2 :: EP^2 : PF^2$, c'est-à-dire :: $CA^2 : PF^2$ ou (Lem. 12.) :: $CD^2 : CB^2$; donc, en composant toutes ces raisons on aura $L \times QR : QT^2 :: AC \times L \times PC^2 \times CD^2$ ou :: $2 CB^2 \times PC^2 \times CD^2 : PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$ ou :: $2 PC : Gv$. Or, puisque $2 PC$ & Gv sont égales lorsque les points P & Q coïncident, les quantités $L \times QR$ & QT^2 qui leur sont proportionnelles seront donc égales aussi. Multipliant présentement ces quantités égales par $\frac{SP^2}{QR}$, on aura $L \times SP^2 = \frac{SP^2 \times QT^2}{QR}$. Donc par les Corol. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripète sera réciproquement comme $L \times SP^2$, c'est-à-dire en raison renversée de SP^2 . C. Q. F. T.

LIVRE
PREMIER.

Fig. 21.

AUTRE SOLUTION.

Comme la force qui tend au centre de l'ellipse, & par laquelle le corps P peut faire sa révolution dans cette courbe, est par le Cor. 1. de la Prop. 10. proportionnelle à la distance CP du corps au centre C de l'ellipse; en menant CE parallèle à la tangente PR de l'ellipse, on verra par le Cor. 3. de la Prop. 7. que la force par laquelle ce même corps P feroit sa révolution autour d'un autre point quelconque S de l'ellipse, feroit comme $\frac{PE^2}{SP^2}$ Fig. 21. en supposant que E soit la rencontre de CE & de la droite SP , tirée au point S . Donc, lorsque le point S fera le foyer, & que par conséquent PE fera constante, la force centripète sera comme $\frac{1}{SP^2}$ C. Q. F. T.

Dans ce Problème, ainsi que dans le Probl. 5. on pourroit se contenter d'appliquer la conclusion trouvée pour le cas de l'ellipse à celui de la Parabole & de l'hyperbole; mais à cause de l'importance de ce Problème, & de l'étendue de son usage dans les Propositions suivantes, j'ai cru qu'il ne feroit pas inutile de démontrer en particulier les cas de la parabole & de l'hyperbole.

PROPOSITION XII. PROBLÈME VII.

Supposé qu'un corps se meuve dans une hiperbole; on demande la loi de la force centripete qui tend au foyer de cette courbe.

Fig. 22.

Que CA, CB soient les demi axes de l'hyperbole; PG, KD d'autres diametres conjugués; PF une perpendiculaire au diametre KD ; & Qv une ordonnée au diametre PG . Qu'on tire SP , qui coupe le diametre DK en E , & l'ordonnée Qv en x , & qu'on acheve le parallélogramme $QRPx$; il est clair que EP sera égale au demi axe transversal AC ; car tirant par l'autre foyer H de l'hyperbole la ligne HI parallele à EC , CH étant égale à CS , EI sera égale à ES , & par conséquent EP sera la moitié de la différence des lignes PS & PI , c'est-à-dire, (à cause que IH, PR sont paralleles, & que les angles IPR, HPZ sont égaux) qu'elle sera égale à la moitié de la différence des lignes PS & PH , c'est-à-dire que $EP = AC$.

Cela posé, tirant QT perpendiculaire sur SP , & nommant L le parametre principal de l'hyperbole ou $\frac{2BC^2}{AC}$, on aura $L \times QR : L \times Pv :: QR : Pv$ ou $:: Px : Pv$, c'est-à-dire, à cause des triangles semblables Pxv, PEC , $:: PE : PC$, ou $:: AC : PC$. On aura aussi, $L \times Pv : Gv \times Pv :: L : Gv$; & par la nature des coniques $Gv \times vP : Qv^2 :: PC^2 : CD^2$. De plus $Qx^2 QT^2$, ou (ce qui revient au même, Cor. 2. Lem. 7. lorsque les points P & Q coïncident) $Qv^2 : QT^2 :: EP^2 : PF^2$, c'est-à-dire, $:: CA^2 : PF^2$, ou Lemme 12. $:: CD^2 : CB^2$, & en composant toutes ces raisons, on aura $L \times QR : QT^2 :: AC \times L \times PC^2 \times CD^2$ ou $2BC^2 \times PC^2 \times CD^2 : PC \times Gv \times CD^2 \times CB^2$, c'est-à-dire $:: 2PC : Gv$; mais lorsque les points P & Q coïncident, $2PC = Gv$. Donc les quantités $L \times QR$ & QT^2 qui leur sont proportionnelles seront aussi égales, & en multipliant ces quantités égales par $\frac{SP^2}{QR}$, on aura $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR} = L \times SP^2$.

Donc, par les Cor. 1. & 5. de la Prop. 6. la force centripète sera réciproquement comme $L \times SP^2$, c'est-à-dire, en raison renversée du quarré de la distance SP . C. Q. F. T.

LIVRE
PREMIER.

AUTRE SOLUTION.

Si on cherche la force en prenant le centre C de l'hyperbole pour centre des forces, on la trouvera proportionnelle à la distance CP . Donc, par le Cor. 3. de la Prop. 7. la force qui tend au foyer S sera comme $\frac{PE^3}{SP^2}$; c'est-à-dire, à cause que PE est donnée, réciproquement comme SP^2 . C. Q. F. T.

Fig. 22.

On démontrera de la même manière que si cette force centripète se change en une force centrifuge, le corps décrira l'hyperbole conjuguée.

LEMME XIII.

Le Parametre d'un diamètre quelconque d'une parabole, est quadruple de la distance du sommet de ce diamètre au foyer de la Figure.

Cela se démontre par les coniques.

LEMME XIV.

La perpendiculaire, tirée du foyer d'une parabole à sa tangente, est moyenne proportionnelle entre les distances du foyer au point de contact, & au sommet principal de la Figure.

Soient AP une parabole, S son foyer, A son sommet principal, P le point de contact, PO une ordonnée au diamètre principal, PM une tangente qui rencontre le diamètre principal en M , & SN la ligne perpendiculaire tirée du foyer sur la tangente. Ayant tiré AN , il suivra de l'égalité des lignes MS & SP , MN & NP , MA & AO , que les droites AN & OP sont parallèles, & par conséquent que le triangle SAN est rectangle en A , & semblable aux triangles égaux SNM , SNP ; donc $PS : SN :: SN : SA$. C. Q. F. D.

Fig. 23.

Cor. 1. Donc $PS^2 : SN^2 :: PS : SA$.

Cor. 2. A cause que SA est donnée, SN^2 sera proportionnelle à PS .

Cor. 3. Le concours d'une tangente quelconque PM & de la droite SN , tirée perpendiculairement du foyer sur cette tangente, tombera sur la droite AN qui touche la parabole à son sommet principal.

PROPOSITION XIII. PROBLÈME VIII.

Supposé qu'un corps décrive une parabole, on demande la loi de la force centripète qui tend au foyer de cette courbe.

Fig. 24.

La construction demeurant la même que dans le Lemme précédent, soient P le lieu de la parabole dans lequel on suppose d'abord le corps, & Q le lieu consécutif, de ce lieu Q tirez QR parallèle à SP , & QT perpendiculaire sur cette ligne SP , que v soit la rencontre de PG avec la parallèle Qv à la tangente, & x la rencontre de la même parallèle Qv avec SP , parce que les triangles Pxv , SPM sont semblables, & que les côtés SM , SP de l'un de ces triangles sont égaux, les côtés Px ou QR , & Pv de l'autre triangle seront aussi égaux. Mais, par les coniques, le carré de l'ordonnée Qv est égal au rectangle sous le paramètre & le segment du diamètre Pv , c'est-à-dire, par le Lemme 13. au rectangle $4PS \times Pv$ ou $4PS \times QR$; & par le Cor. 2. du Lemme 7. les points P & Q coïncidant, la raison de Qv à Qx devient la raison d'égalité. Donc, dans ce cas, $Qx^2 = 4PS \times QR$. De plus, à cause des triangles semblables QxT , SPN , $Qx^2 : QT^2 :: PS : SN^2$; c'est-à-dire, Cor. 1. Lem. 14. $:: PS : SA$, ou $:: 4PS \times QR : 4SA \times QR$. Donc $QT^2 = 4SA \times QR$. Multipliant ensuite cette égalité par $\frac{SP^2}{QR}$, on aura $\frac{SP^2 \times QT^2}{QR} = SP^2 \times 4SA$, ce qui apprend, Cor. 1. & 5. de la Prop. 6. que la force centripète est réciproquement comme $SP^2 \times 4SA$, c'est-à-dire, à cause que $4SA$ est donnée que cette force est en raison renversée du carré de la distance SP . C. Q. F. T.

Cor. 1. Des trois dernières Propositions on tire, que si un corps quelconque attiré continuellement vers un centre par une force réciproquement proportionnelle au carré des distances part d'un lieu P , suivant une droite quelconque PR , & avec une vitesse quelconque, ce corps se mouvra dans une section conique qui aura pour l'un de ses foyers le centre des forces, & réciproquement; car le foyer, le point de contact, & la position de la tangente étant donnés, on peut décrire la section conique qui aura à ce point une courbure donnée: & deux orbites qui se touchent, & qui sont décrites avec la même vitesse & la même force centripète ne sçauroient différer entr'elles.

Cor. 2. Si la vitesse avec laquelle le corps part du lieu P est celle qui peut lui faire décrire la petite ligne PR dans un espace de temps fort court, & que la force centripète puisse faire parcourir à ce même corps dans le même temps l'espace QR : le corps décrira une section conique, dont le paramètre sera ce que devient la quantité $\frac{QT^2}{QR}$, lorsque les petites lignes PR & QR diminuent à l'infini.

Fig. 25.

Dans ces Corollaires je rapporte le cercle à l'ellipse, & j'excepte le cas où le corps descend en ligne droite au centre.

PROPOSITION XIV. THÉORÈME VI.

Si plusieurs corps font leurs révolutions autour d'un centre commun, & que les forces centripètes soient réciproquement en raison doublée de leurs distances à ce centre, les paramètres principaux de leurs orbites seront en raison doublée des aires qu'ils décrivent en temps égal.

Car, par le Cor. 2. de la Prop. 13. le paramètre L est égal à ce que devient la quantité $\frac{QT^2}{QR}$ lorsque les points P & Q coïncident; mais la petite ligne QR est dans un temps donné comme la force centripète qui la fait décrire, c'est-à-dire, par

Fig. 25.

l'hypothèse, en raison renversée de SP^2 , Donc $\frac{QT^2}{QR}$ est proportionnelle à $QT^2 \times SP^2$, c'est-à-dire, que le parametre L est en raison doublée de l'aire $QT \times SP$. C. Q. F. D.

Corol. Donc l'aire elliptique totale, & le rectangle formé par les axes, qui lui est proportionnel, est en raison composée de la raison sousdoublée du parametre, & de la raison du temps périodique; car l'aire totale est proportionnelle à l'aire $QT \times SP$ décrite dans un temps donné, & multipliée par le temps périodique.

PROPOSITION XV. THÉOREME VII.

Les mêmes choses étant posées, les temps périodiques dans les ellipses, sont en raison sesquiplée de leurs grands axes.

Puisque le petit axe est moyen proportionnel entre le grand axe & le parametre, le rectangle formé par les axes est donc en raison composée de la raison sousdoublée du parametre & de la raison sesquiplée du grand axe; mais ce rectangle, par le Cor. de la Prop. 14. est en raison composée de la raison sousdoublée du parametre, & de la raison du temps périodique. Orant donc de part & d'autre la raison sousdoublée du parametre, il restera la raison sesquiplée du grand axe, qui sera la même que la raison du temps périodique. C. Q. F. D.

Corol. Les temps périodiques sont donc les mêmes dans les ellipses, & dans les cercles, dont les diametres sont égaux aux grands axes des ellipses.

PROPOSITION XVI. THÉOREME VIII.

Les mêmes choses étant posées, si par les points où l'on suppose les corps dans chaque orbite on mène des tangentes, & qu'on abaisse du foyer commun des perpendiculaires sur les tangentes, les vitesses de ces corps seront en raison composée de la raison inverse de ces perpendiculaires

Du foyer S à la tangente PR tirez la perpendiculaire SY , la vitesse du corps P sera réciproquement en raison fousdoublée de la quantité $\frac{SY^2}{L}$; car cette vitesse est comme le petit arc PQ

Fig. 26.

décrit dans une particule de temps donnée, c'est-à-dire, par le Lemme 7. comme la tangente PR , ou ce qui revient au même,

(à cause que $PR : QT :: SP : SY$) comme $\frac{SP \times QT}{SY}$,

c'est-à-dire, comme SY réciproquement & $SP \times QT$ directement ; or $SP \times QT$ est comme l'aire décrite en un temps donné, c'est-à-dire par la Prop. 14. en raison fousdoublée du parametre. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Les parametres principaux sont en raison composée de la raison doublée des perpendiculaires, & de la raison doublée des vitesses.

Cor. 2. Les vitesses des corps, dans les plus grandes & les moindres distances du foyer commun, sont en raison composée de la raison inverse des distances, & de la raison directe fousdoublée des parametres principaux ; car alors les perpendiculaires sont les distances elles-mêmes.

Cor. 3. Donc la vitesse, dans une section conique à la plus grande ou à la plus petite distance du foyer, est à la vitesse dans un cercle à la même distance du centre, en raison fousdoublée du parametre au double de cette distance.

Cor. 4. Les vitesses des corps qui font leurs révolutions dans des ellipses sont les mêmes dans leurs moyennes distances du foyer commun, que celles des corps qui circulent dans des cercles aux mêmes distances ; c'est-à-dire, par le Cor. 6. de la Prop. 4. que ces vitesses sont en raison inverse fousdoublée des distances. Car les perpendiculaires sont moitié des petits axes, & les petits axes sont comme les moyennes proportionnelles entre les moyen-

nes distances & les parametres. Composant donc la raison inverse des perpendiculaires avec la raison souse doublée directe des parametres, il en viendra la raison souse doublée inverse des distances.

Cor. 5. Dans la même figure, ou même dans diverses figures, pourvu que les parametres principaux soient égaux, la vitesse du corps est réciproquement comme la perpendiculaire tirée du foyer à la tangente.

Cor. 6. Dans la parabole, la vitesse est réciproquement en raison souse doublée de la distance du corps au foyer; dans l'ellipse elle varie plus que dans cette raison, & moins dans l'hyperbole. Pour démontrer ces trois vérités, il suffit de remarquer (*Cor. 2. Lem. 14.*) que la perpendiculaire abaissée du foyer sur la tangente de la parabole est en raison souse doublée de la distance; que dans l'ellipse cette perpendiculaire est dans une plus grande raison, & que dans l'hyperbole elle est dans une moindre raison.

Cor. 7. Dans la parabole, la vitesse, à une distance quelconque du foyer, est à la vitesse dans un cercle à la même distance du centre en raison souse doublée de deux à un. Dans l'ellipse elle est dans une moindre raison, & dans une plus grande dans l'hyperbole; car, par le *Cor. 2.* de cette Proposition, la vitesse au sommet de la parabole est dans cette proportion, & par les *Corol. 6.* de cette Proposition & de la Proposition 4. cette proportion se conserve à toutes les distances. D'où il suit qu'à chaque point de la parabole, la vitesse est égale à la vitesse du corps qui feroit sa révolution dans un cercle à la moitié de la distance du centre; que dans l'ellipse elle est moindre, & plus grande dans l'hyperbole.

Cor. 8. La vitesse d'un corps qui circule dans une section conique quelconque est à la vitesse d'un corps qui fait sa révolution dans un cercle à la distance de la moitié du parametre principal, comme cette distance est à la perpendiculaire abaissée du foyer de la section sur la tangente. La démonstration en est évidente par le *Cor. 5.*

Cor. 9. Donc, puisque (*Cor. 6. Prop. 4.*) la vitesse d'un corps qui tourne dans ce cercle seroit à la vitesse d'un corps qui tourne dans un autre cercle quelconque en raison sousdoublée inverse des distances, la vitesse d'un corps qui tourne dans une section conique sera à la vitesse de celui qui tourne dans un cercle à la même distance, comme la moyenne proportionnelle entre cette distance commune & la moitié du paramètre principal de la section conique est à la perpendiculaire abaissée du foyer commun sur la tangente de cette section conique.

PROPOSITION XVII. PROBLÈME IX.

Supposant que la force centripète soit réciproquement proportionnelle au carré de la distance au centre, & que la quantité absolue de cette force soit connue, on demande la courbe qu'un corps décrit en partant d'un lieu donné, avec une vitesse donnée, suivant une ligne droite donnée.

Que la force centripète qui tend au point S soit celle qui fait circuler le corps p dans une orbite donnée pq , & que la vitesse de ce corps au point p soit connue. Que le corps P parte du lieu P , suivant la ligne PR avec une vitesse donnée, & qu'en vertu de cette vitesse & de la force centripète, il décrive la section conique PQ . Que la droite PR touche cette courbe en P , & que pr touche pareillement l'orbite pq en p ; si l'on imagine des perpendiculaires tirées du point S à ces tangentes; il est clair, par le *Cor. 1.* de la *Prop. 16.* que le principal paramètre de la section conique cherchée sera au principal paramètre de l'orbite donnée, en raison composée de la raison doublée des perpendiculaires, & de la raison doublée des vitesses, ainsi il sera donné. Soit L le paramètre de la section conique cherchée, le foyer S de cette même section étant aussi donné, en faisant l'angle RPH égal au complément à deux droits de l'angle RPS , on aura la position de la ligne PH , qui passe par l'autre foyer; car tirant SK perpendiculaire à PH ,

Fig. 27. & 28.

& supposant que BC soit le demi axe conjugué, on aura,
 $SP^2 - 2KP \times PH + PH^2 = SH^2 = 4CH^2 = 4BH^2 - 4BC^2$
 $= SP + PH^2 - L \times SP + PH = SP^2 + 2SP \times PH + PH^2 - L \times$
 $SP + PH$, & ajoutant de part & d'autre $2KP \times PH - SP^2 - PH^2$
 $+ L \times SP + PH$, il viendra $L \times SP + PH = 2SP \times PH + 2KP \times PH$
 ou $SP + PH : PH :: 2SP + 2KP : L$. d'où PH est donnée tant
 de longueur que de position.

Si la vitesse du corps au point P est telle que le parametre L
 soit moindre que $2SP + 2KP$, la ligne PH tombera du même
 côté de la tangente PR que la ligne PS ; ainsi la courbe sera
 une ellipse, & comme ses foyers S & H seront donnés, son
 grand axe $SP + PH$ sera aussi donné.

Fig. 27.

Si la vitesse du corps est telle, que le parametre L soit égal à
 $2SP + 2KP$, la ligne PH fera infinie, & par conséquent la
 courbe sera une parabole dont l'axe SH parallèle à la ligne PK
 sera donné.

Si le corps part du lieu P avec une vitesse encore plus grande,
 il faudra prendre la ligne PH de l'autre côté de la tangente; ainsi
 la tangente passant entre les foyers, la courbe sera une hyperbole
 dont l'axe principal sera égal à la différence des lignes SP & PH ,
 & sera par conséquent donné.

Dans tous ces cas, si l'on suppose que le corps P se meuve
 dans la section conique ainsi trouvée, il est clair, par les Prop. 11.
 12. & 13. que la force centripete sera réciproquement comme
 le carré de la distance du corps au centre S des forces; ainsi
 la ligne PQ représentera exactement celle que le corps dé-
 crira par une telle force en partant du lieu donné P , avec une
 vitesse donnée, & suivant une ligne droite PR donnée de po-
 sition. C. Q. F. F.

Cor. 1. De-là, le sommet principal D , le parametre L , & le
 foyer S étant donnés, on aura dans toute section conique l'autre
 foyer H , en prenant DH à DS , comme le parametre à la diffé-
 rence entre le parametre & $4DS$; car la proportion $SP + PH$:

$PH :: 2SP + 2PK : L$ devient dans le cas de ce Corollaire,
 $DS + DH : DH :: 4DS : L$, & en divisant on aura $DS :$
 $DH :: 4DS - L : L$.

LIVRE
 PREMIER.

Cor. 2. Ainsi, si la vitesse du corps dans le sommet principal D est donnée, on trouvera facilement l'orbite, en déterminant d'abord son paramètre par cette condition (*Cor. 3. de la prop. 16.*) qu'il soit au double de la distance DS en raison doublée de cette vitesse donnée à la vitesse du corps qui tourne dans un cercle à la distance DS , & en prenant ensuite DH à DS , comme le paramètre est à la différence entre le paramètre & $4DS$.

Fig. 27.

Cor. 3. De-là, si le corps se meut dans une section conique quelconque, & qu'il soit dérangé de son orbite par une impulsion quelconque; on pourra connoître la nouvelle orbite dans laquelle il circulera ensuite, en composant le mouvement que ce corps a déjà avec le mouvement que cette impulsion seule lui auroit imprimé; car par ce moyen on aura le mouvement du corps lorsqu'il part du lieu donné dans lequel il a reçu l'impulsion suivant une ligne droite donnée de position.

Cor. 4. Et si ce corps est continuellement troublé dans sa révolution par quelque force qui lui soit imprimée extérieurement, on connoîtra à peu près la courbe qu'il décrira, en prenant les changemens que cette force produit dans plusieurs points quelconques, & en estimant par l'ordre de la série les changemens continuels dans les lieux intermédiaires.

S C H O L I E.

Si le corps P par une force centripète qui tend à un point quelconque donné R , se meut dans le périmètre d'une section conique quelconque donnée, dont le centre soit C ; & qu'on cherche la loi de la force centripète: on n'aura qu'à mener CG parallèle au rayon RP , & qui rencontre la tangente PG en G , & cette force fera, par le *Cor. 1.* & la Scholie de la *Prop. 10.* & par le *Cor. 3. de la Prop. 7.* comme $\frac{CG^3}{RP^2}$.

Fig. 29.

QUATRIÈME SECTION.

De la détermination des orbes elliptiques, paraboliques & hiperboliques, lorsque l'un des foyers est donné.

LEMME XV.

Si des foyers S & H d'une hiperbole ou d'une ellipse quelconque, on tire à un troisième point quelconque V deux lignes droites SV, HV, l'une desquelles HV soit égale à l'axe principal de la figure, c'est-à-dire, à l'axe dans lequel les foyers se trouvent, & qu'on élève sur le milieu de l'autre ligne SV la perpendiculaire TR, cette perpendiculaire touchera en quelque point la section conique; & réciproquement, si elle la touche, la ligne HV sera égale à l'axe principal de la Figure.

Fig. 30.

Soient, le point *R* la rencontre de la perpendiculaire *TR* avec la ligne *HV* prolongée, s'il est nécessaire, & *SR* la droite tirée de *S* à ce point *R*; les lignes *TS*, *TV* étant égales, les lignes *SR* & *VR* le seront aussi, ainsi que les angles *TRS*, *TRV*; donc, le point *R* sera à la section conique, & la perpendiculaire *TR* sera tangente de cette section au point *R*. L'inverse se démontreroit de même. *C. Q. E. D.*

PROPOSITION XVIII. PROBLÈME X.

Le foyer, & les axes principaux étant donnés, décrire les trajectoires elliptiques & hiperboliques qui passent par des points donnés, & qui touchent des droites données de position.

Fig. 31.

Soit *S* le foyer commun de ces trajectoires, *AB* une ligne égale à l'axe principal d'une quelconque de ces trajectoires, *P* un point par lequel cette courbe doit passer, & *TR* une ligne

qu'elle doit toucher : soit de plus le cercle HG décrit du centre P & de l'intervalle $AB - SP$, si l'orbite est une ellipse, ou $AB + SP$, si c'est une hiperbole : abaissant ensuite sur la tangente TR la perpendiculaire ST prolongée en V , en sorte que $TV = ST$, du centre V & de l'intervalle AB décrivez le cercle FH .

Par cette méthode, soit qu'on ait les deux points P & p , ou les deux tangentes TR & tr , ou le point P & la tangente TR , on décrira toujours deux cercles. Soit H leur intersection commune, décrivant alors une trajectoire qui ait pour axe principal l'axe donné, & les points S & H pour foyers, le Problème sera résolu. Car cette trajectoire passera par le point P , à cause que $PH + SP$ dans l'ellipse, & $PH - SP$ dans l'hyperbole, seront égales à l'axe. De plus, par le Lemme précédent, la ligne TR touchera cette trajectoire. On prouvera par le même raisonnement ou qu'elle passera par les deux points P & p , ou qu'elle aura pour tangentes les lignes TR , & tr . C. Q. F. F.

Fig. 31.

PROPOSITION XIX. PROBLÈME II.

Autour d'un foyer donné décrire une trajectoire parabolique, qui passe par des points donnés, & qui touche des lignes droites données de position.

S étant le foyer, P un point de la trajectoire à décrire, & TR une tangente de cette trajectoire, du centre P , & de l'intervalle PS soit décrit le cercle FG , & soit abaissé de S sur la tangente TR la perpendiculaire ST qu'on prolongera en V , en sorte que $TV = ST$. On décrira un autre cercle fg de la même manière si on a une autre point donné p ; ou bien on trouvera un autre point v si on a une autre tangente tr ; cela fait on mènera la droite IF qui touche les deux cercles FG , fg , si les deux points P & p sont donnés, ou qui passe par les deux points V & v , si les deux tangentes TR & tr sont données, ou enfin qui touche le cercle FG , & passe par le point V , si on a le point P , & la tangente TR .

Fig. 32.

Abaissant ensuite sur FI la perpendiculaire SI , coupée en deux parties égales au point K , & décrivant sur l'axe SK une parabole dont le sommet principal soit K , le Problème sera résolu. Car cette parabole, à cause que SK, IK sont égales, ainsi que SP & FP , passera par le point P , & par le Lemme 14. Cor. 3. elle aura TR pour tangente, à cause que ST & TV sont égales, & que l'angle STR est droit. *C. Q. F. F.*

PROPOSITION XX. PROBLÈME XII.

Décrire une trajectoire quelconque donnée d'espece, autour d'un foyer donné, laquelle passe par des points donnés, & touche des lignes droites données de position.

Fig. 33. *Cas 1.* Soit proposé d'abord de décrire la trajectoire ABC qui passe par deux points B & C , & qui ait pour foyer le point donné S .

Comme cette trajectoire est donnée d'espece, la raison de l'axe principal à la distance des foyers sera donnée. Prenez KB à BS , & LC à CS dans cette raison; décrivez deux cercles des centres B & C , & des intervalles BK & CL ; sur la droite KL qui touche ces cercles en K & en L , abaissez la perpendiculaire SG , & coupez cette ligne SG en A & en a , en sorte que GA soit à AS , & $G a$ à aS , comme KB à BS ; & des sommets A, a , & sur l'axe Aa décrivez ensuite une trajectoire, le Problème sera résolu.

Car soit H l'autre foyer de la Figure décrite, puisqu'on a, $GA : AS :: Ga : aS$, on aura, en divisant, $G a - GA$ ou $Aa : aS - AS$ ou SH dans la même raison, & par conséquent dans la raison qui est entre l'axe principal de la Figure cherchée & la distance de ses foyers. La Figure décrite est donc de la même espece que la Figure à décrire. Et comme KB est à BS & LC à CS dans la même raison, cette courbe passera par les points B & C , comme il est clair par les coniques.

Fig. 34. *Cas 2.* Soit proposé maintenant de décrire autour du foyer S donné, une trajectoire qui soit touchée quelque part par les deux lignes TR & tr .

Abaissez du foyer sur ces tangentes les perpendiculaires ST , $S\epsilon$, & prolongez ces perpendiculaires en V , & en ν , en forte que TV & $\epsilon\nu$ soient égales à TS & à ϵS . Coupez la ligne $V\nu$ en deux parties égales au point O , élevez ensuite la perpendiculaire indéfinie OH , & coupez en K & en k la droite VS prolongée indéfiniment, en forte que VK soit à KS & Vk à kS , comme l'axe principal de la trajectoire à décrire est à la distance des foyers. Enfin sur le diamètre Kk décrivez un cercle qui coupe la ligne OH en H ; & tracez une trajectoire dont les foyers soient S & H , & l'axe principal une ligne égale à VH ; & le Problème sera résolu.

Car coupant kK en deux parties égales au point X , & tirant les lignes HX , HS , HV , $H\nu$: puisque $VK:KS::Vk:kS$, & par conséquent $VK+Vk:KS+kS::Vk-VK:kS-KS$, c'est-à-dire $2VX:2KX$, & $2KX:2SX$, ou ce qui revient au même $VX:HX::HX:SX$; les triangles VXH , HXS sont semblables: ce qui donne $VH:HS::VX:XH$, c'est-à-dire $VK:KS$. De-là il suit que l'axe principal VH de la trajectoire décrite est à la distance SH de ses foyers, dans la même raison que celle qui est entre l'axe principal de la trajectoire à décrire & la distance de ses foyers, & que par conséquent la trajectoire est de l'espece demandée. De plus, comme VH & νH sont égales à l'axe principal, & que les lignes VS , νS sont coupées en deux parties égales par les perpendiculaires TR , ϵr , il est clair, par le Lemme 15. que la trajectoire décrite aura encore la propriété demandée d'être touchée par les droites TR , ϵr . C. Q. F. F.

Fig. 34.

Cas 3. Le foyer S étant donné, on demande une trajectoire qui touche la droite TR en un point donné R . Fig. 35.

Sur la droite TR abaissez la perpendiculaire ST , & prolongez la en V , en forte que $TV=ST$. Tirez ensuite VR & coupez en k & en K la droite VS prolongée indéfiniment en forte que VK soit à SK & Vk à $S k$ comme l'axe principal de l'ellipse à

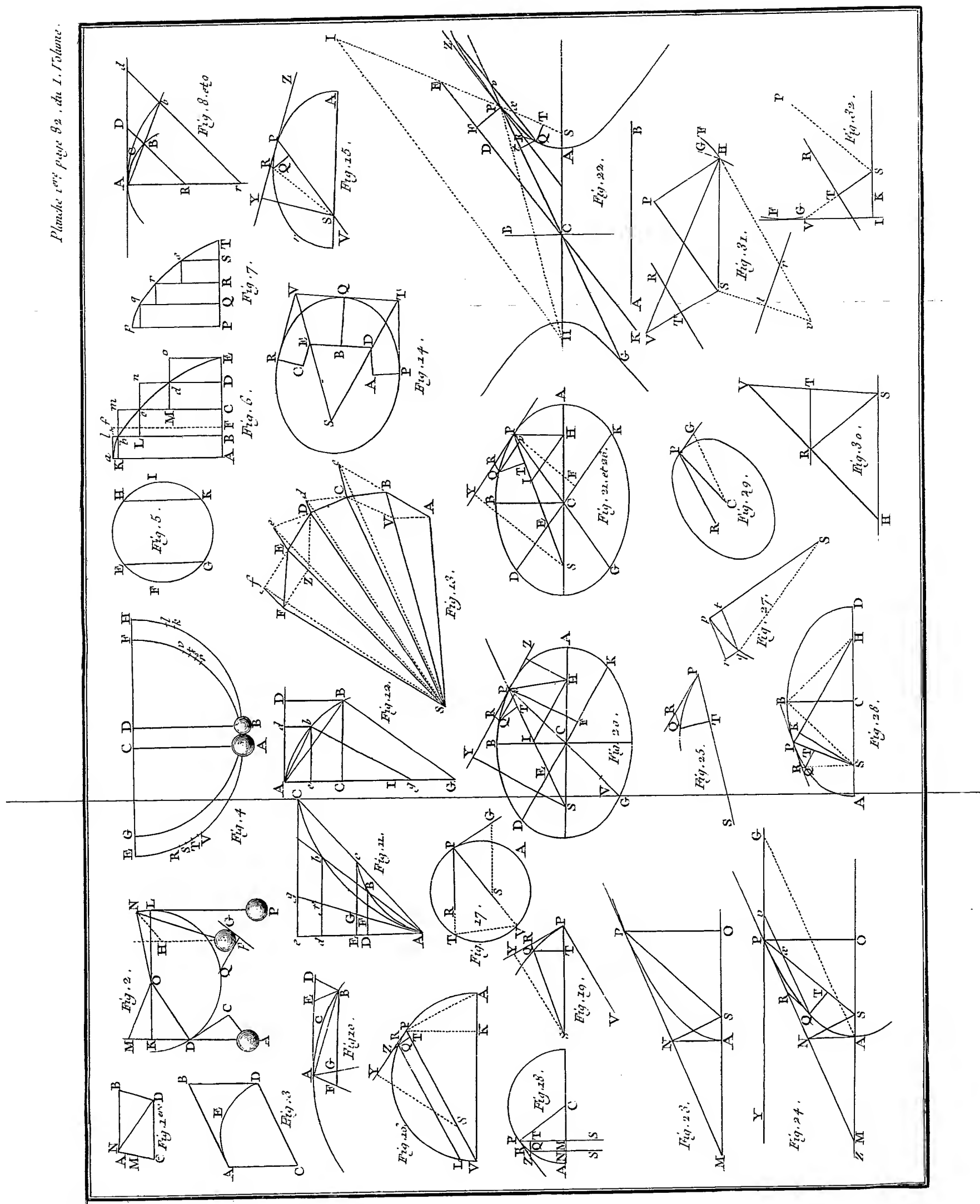
à décrire est à la distance des foyers ; ayant décrit ensuite sur le diamètre Kk un cercle qui coupe en H la droite VR prolongée, tracez une trajectoire dont les foyers soient S & H , & qui ait pour axe principal une ligne égale à VH , & le Problème sera résolu.

Car il est clair, par ce qui a été démontré dans le second cas, que $VH : SH :: VK : SK$, & par conséquent comme l'axe principal de la trajectoire à décrire est à la distance entre ses foyers, la trajectoire décrite sera donc de même espèce que la trajectoire à décrire. De plus, il est clair par les coniques, que cette trajectoire sera touchée au point R par la droite TR qui coupe l'angle $VR S$ en deux parties égales. *C. Q. F. F.*

Fig. 36. & 37. Cas 4. Soit enfin proposé de décrire autour du foyer S la trajectoire APB qui soit touchée par la droite TR , & qui passe par un point quelconque P donné hors de la tangente, & qui soit semblable à la Figure apb décrite des foyers s, h , & sur l'axe principal ab .

Abaissez sur la tangente TR la perpendiculaire ST , & prolongez-la en V , en sorte que $TV = ST$. Faites les angles hsq , shq respectivement égaux aux angles VSP , SPV , du centre q & d'un intervalle qui soit à ab , comme SP à VS , décrivez un cercle qui coupe la figure apb en p , joignez les points s & p & tirez SH qui soit à sh , comme SP à sp , & qui fasse l'angle PSH égal à l'angle $ps h$, & l'angle VSH égal à l'angle psq . Ensuite, des foyers H & S sur l'axe principal AB égal à la distance VH , décrivez la section conique, & le Problème sera résolu.

Car si on tire sv qui soit à sp , comme sh à sq , & qui fasse l'angle vsp égal à l'angle hsq , & l'angle vsh égal à l'angle psq , les triangles svh , spq seront semblables, & par conséquent on aura $vh : pq :: sh : sq$, c'est-à-dire, à cause des triangles semblables $VSP : hsq :: SV : SP$ ou $ab : pq$. Donc $vh = ab$. De plus, à cause des triangles semblables VSH , vsh $VH : SH :: vh : sh$, c'est-à-dire, que l'axe de la section conique



décrite est à l'intervalle de ses foyers comme l'axe ab à l'intervalle sh des foyers; & par conséquent la figure décrite est semblable à la figure aph . De plus, cette figure passe par le point P , parce que le triangle PSH , est semblable au triangle $ps h$; & elle est touchée par la droite TR , à cause que son axe est égal à VH , & que VS est coupée en deux parties égales par TR . C. Q. F. F.

LIVRE
PREMIER.

Fig. 36, & 37.

L E M M E X V I.

Trouver un point, duquel tirant des lignes droites à trois points donnés, les différences de ces trois droites soient nulles ou données.

Cas 1. Soient A, B, C , les points donnés, & Z , le quatrième point qu'il faut trouver; la différence des lignes AZ, BZ étant donnée, le point Z sera à une hyperbole qui aura pour foyers les points A & B , & pour axe principal la différence donnée. Fig. 38. Soit MN cet axe, prenant $PM:MA::MN:AB$, élevant ensuite PR perpendiculaire sur AB , & abaissant ZR perpendiculaire sur PR ; on aura, par la nature de l'hyperbole, $ZR:AZ::MN:AB$. Par le même raisonnement on trouvera que le point Z sera à une autre hyperbole dont les foyers seront les points A & C , & l'axe principal la différence entre AZ & CZ , & on trouvera aussi la droite QS perpendiculaire sur AC , à laquelle QS , si on mène la perpendiculaire ZS d'un point quelconque Z de cette hyperbole, ZS sera à AZ comme la différence entre AZ & CZ est à AC . Cela posé, il est aisé de remarquer que les raisons de ZR & de ZS à AZ sont données, & que par conséquent celle que ZR & ZS ont entr'elles est donnée aussi. Donc, si les droites RP, SQ prolongées se rencontrent en T , & qu'on tire TZ & TA , la figure $TRZS$ sera donnée d'espèce, & la droite TZ dans laquelle est placé le point cherché Z sera donnée de position. De plus, la droite TA sera donnée aussi ainsi que l'angle ATZ ; & parce que les raisons de AZ & de TZ

à ZS sont données, celle de AZ & de TZ entr'elles sera donnée aussi, & par conséquent le triangle entier ATZ , dont le sommet est le point cherché Z , sera enfin donné. *C. Q. F. T.*

Cas 2. Si deux de ces trois lignes, comme AZ & BC , sont égales, tirez la droite TZ en sorte qu'elle partage la droite AB en deux parties égales, & cherchez ensuite le triangle ATZ comme ci-dessus.

Cas 3. Si ces trois lignes sont égales, le point Z sera placé dans le centre du cercle qui passe par les points A, B, C . *C. Q. F. T.*

Ce Problème se résout aussi par le livre des Touchantes d'*Apollonius*, restitué par *Viet*.

PROPOSITION XXI. PROBLÈME XIII.

Décrire une trajectoire autour d'un foyer donné, laquelle passe par des points donnés, & touche des droites données de position.

Que le foyer S , le point P , & la tangente TR soient donnés, & qu'il s'agisse de trouver l'autre foyer H .

Abaissez sur la tangente la perpendiculaire ST , & prolongez-la en Y , en sorte que $TY = ST$; YH , sera alors égale à l'axe principal. Tirez ensuite SP , HP , & SP fera la différence entre HP & l'axe principal. De la même manière, si on a plusieurs tangentes TR , ou plusieurs points P , on trouvera toujours autant de lignes YH , ou PH , tirées de ces points Y ou P , au foyer H , lesquelles seront égales aux axes, ou en différeront de longueurs données SP , & ces lignes seront par conséquent égales entre elles, ou bien elles auront des différences données, & de-là il suit qu'on aura par le Lemme précédent l'autre foyer H . Ayant donc les foyers & la longueur de l'axe (qui fera YH , ou bien la droite égale à $PH \pm SP$, c'est-à-dire, $PH + PS$, si la trajectoire est une ellipse, & $PH - SP$, si c'est une hyperbole) on aura la trajectoire. *C. Q. F. F.*

S C H O L I E.

LIVRE
PREMIER.

Lorsque la trajectoire est une hyperbole, je ne prends pour trajectoire qu'une des hyperboles opposées; car le corps, en persévérant dans son mouvement, ne peut jamais passer dans l'autre hyperbole.

Le cas où trois points sont donnés se résout plus facilement de cette manière: Soient B, C, D les points donnés. Tirez les lignes BC, CD , & prolongez-les en E , & en F , en sorte que $EB:EC::SB:SC$, & que $FC:FD::SC:SD$. Ayant mené EF , & l'ayant prolongée, abaissez-lui les perpendiculaires SG, BH , ensuite sur GS prolongée infiniment prenez $GA:AS$ & $Ga:aS::HB:BS$, A sera le sommet, & Aa l'axe principal de la trajectoire, laquelle, selon que GA sera plus grand, égal, ou plus petit que AS , fera une ellipse, une parabole, ou une hyperbole. Dans le premier cas, le point a tombera du même côté que le point A , par rapport à la ligne GF ; dans le second cas il s'éloignera à l'infini; & dans le troisième il tombera du côté opposé au point A , par rapport à la ligne GF . Car si on abaisse sur GF les perpendiculaires CI, DK , on aura, $IC:HB::EC:EB$, c'est-à-dire, $::SC:SB$, & réciproquement $IC:SC::HB:SB$ ou $::GA:SA$, & par un semblable raisonnement KD fera à SD dans la même raison. Donc, les points B, C, D sont à la section conique, dans laquelle toutes les droites tirées du foyer S à la courbe sont aux perpendiculaires abaissées des mêmes points de la courbe sur GF , dans cette raison donnée.

Le célèbre Géometre *la Hire* a donné une solution à-peu-près semblable de ce Problème au huitième Livre de ses Coniques, Prop. 25.



CINQUIÈME SECTION.

De la détermination des Orbites lors qu'aucun des foyers n'est donné.

L E M M E X V I I.

Si d'un point quelconque P d'une Section conique donnée, on mène les quatre droites PQ, PR, PS, PT, qui fassent chacune un angle donné avec chacun des quatre côtés indéfiniment prolongés AB, CD, AC, DB d'un trapeze quelconque ABCD inscrit dans la section conique, le rectangle des droites PQ × PR tirées à deux côtés opposés, sera en raison donnée au rectangle des droites PS × PT tirées aux deux autres côtés opposés.

Fig. 41.

Cas 1. Supposons premièrement que les lignes tirées aux côtés opposés soient parallèles à l'un ou à l'autre des côtés restans, que PQ & PR, par exemple, soient parallèles au côté AC, & PS & PT au côté AB; de plus, que deux de ces côtés opposés comme AC & BD soient parallèles l'un à l'autre. Dans ce cas, la droite qui coupe ces côtés parallèles en deux parties égales, fera un des diamètres de la section conique, & coupera aussi la ligne RQ en deux parties égales. Soit O la rencontre de ce diamètre & de RQ, PO fera une ordonnée à ce même diamètre, & OK prise égale à OP, & placée sur son prolongement fera l'ordonnée opposée. Les points A, B, P & K étant donc à la section conique, il est clair (Prop. 17. 19. 21. 23. du Liv. III. des coniques d'Apollonius) à cause que PK coupe AB sous un angle donné, que le rectangle PQ × QK fera en raison donnée au rectangle AQ × QB. Mais QK = PR, puisque ces lignes sont les différences des lignes égales OK, OP & OQ, OR; donc les rectangles PQ × QK, & PQ × PR sont aussi égaux; & par

Fig. 41.

conséquent le rectangle $PQ \times PR$ est au rectangle $AQ \times QB$, c'est-à-dire au rectangle $PS \times PT$, en raison donnée. C. Q. F. D.

Cas 2. Supposons à présent que les côtés opposés AC , BD du trapeze ne soient point paralleles, tirez Bd parallele à AC & qui rencontre la droite ST en t , & la section conique en d , tirez de plus Cd qui coupe la ligne PQ en r , & DM parallele à PQ & qui coupe Cd en M & AB en N , à cause des triangles semblables BTt , DBN , on aura Bt , ou $PQ : Tt :: DN : NB$, & ainsi $Rr : AQ$ ou $PS :: DM : AN$. Multipliant alors les antécédens par les antécédens, & les conséquens par les conséquens, le rectangle $ND \times DM$ fera au rectangle $AN \times NB$, comme le rectangle $PQ \times Rr$ est au rectangle $PS \times Tt$; mais par le cas 1. le rectangle $PQ \times Pr$ fera au rectangle $PS \times Pt$ dans la même raison. Donc cette raison sera aussi celle du rectangle $PQ \times PR$ au rectangle $PS \times PT$. C. Q. F. D.

Cas 3. Supposons enfin que les quatre lignes PQ , PR , PS , PT ne soient pas paralleles aux côtés AC , AB , mais qu'elles leur soient inclinées d'une façon quelconque.

Ayant tiré Pq , Pr paralleles à AC ; Ps , Pt paralleles à AB ; les angles des triangles PQq , PRr , PSs , PTt seront donnés, ainsi que les rapports de PQ à Pq , de PR à Pr , de PS à Ps , & de PT à Pt . Donc les raisons composées de $PQ \times PR$ à $Pq \times Pr$ & de $PS \times PT$ à $Ps \times Pt$ seront données. Mais, par ce qui a été démontré ci-dessus, la raison de $Pq \times Pr$ à $Ps \times Pt$ est donnée. Donc la raison de $PQ \times PR$ à $PS \times PT$ l'est aussi. C. Q. F. D.

LEMME XVIII.

Les mêmes choses étant posées, si les points P sont tels que les rectangles des droites $PQ \times PR$, menées à deux côtés opposés du trapeze, soient en raison donnée aux rectangles des lignes $PS \times PT$, menées aux deux autres côtés; ces points P seront à une section conique circonscrite au trapeze.

Si par quelqu'un du nombre infini des points P , par le point p ,

LIVRE
PREMIER.

Fig. 42.

Fig. 43.

Fig. 44.

Fig. 44.

par exemple, & par les quatre points A, B, C, D , on imagine une section conique, je dis que cette section conique passera par tout autre point P trouvé de la même manière. Si on le nie, qu'on suppose donc que AP coupe cette courbe en quelque point autre que P , comme en b . Tirant de ces points p & b , aux côtés du trapeze, & sous les angles donnés les droites pq, pr, ps, pt , & bk, bn, bf, bd ; on aura, par le Lemme 17, $pq \times pr : ps \times pt :: bk \times bn : bf \times bd$. Mais $PQ \times PR$ est à $PS \times PT$ dans la même raison, par l'hypothèse. Donc, à cause que les trapezes $bk Af, PQAS$ sont semblables, on aura $PQ : PS :: bk : bf$, & par conséquent, en divisant les termes de la première proportion par les termes correspondans de celle-ci, on aura $bn : bd :: PR : PT$. Donc les trapezes équiangles $Dnbd, DRPT$ sont semblables; d'où l'on tire que leurs diagonales Db, DP coïncident, & qu'ainsi le point b tombe dans l'intersection des droites AP, DP , c'est-à-dire, qu'il coïncide avec le point P , ou, ce qui revient au même, que le point P , quelque part qu'on le prenne, fera à la section conique ainsi déterminée. *C. Q. F. D.*

Fig. 44.

Cor. De-là, si les trois droites PQ, PR, PS sont menées du même point P sous des angles donnés à autant d'autres droites AB, CD, AC données de position, & que le rectangle, sous deux de ces lignes $PQ \times PR$, soit au carré de la troisième PS en raison donnée : le point P , d'où ces lignes seront tirées, fera à la section conique que les lignes AB, CD touchent en A & en C ; & réciproquement.

Car si la ligne BD coïncide avec la ligne AC , la position des trois lignes AB, CD, AC demeurant la même, & qu'ensuite la ligne PT coïncide aussi avec la ligne PS : le rectangle $PS \times PT$ deviendra le carré de PS , & les droites AB, CD qui coupoient la courbe dans les points A & B, C & D , ne pourront plus la couper dans ces points lorsqu'ils se confondent, mais alors elles la toucheront.

On a pris dans ce Lemme le mot de *section conique* dans un sens étendu , en sorte qu'il renferme la section rectiligne qui passe par le sommet du cône , & la circulaire parallèle à sa base. Car si le point P tombe sur la droite qui joint les points A & D , ou C & B , la section conique se changera en deux lignes droites , dont l'une est celle sur laquelle le point P tombe , & l'autre la ligne droite qui joint les deux autres des quatre points donnés. Si deux angles opposés du trapeze sont égaux , pris ensemble , à deux droits , que les quatre lignes PQ , PR , PS , PT soient menées à ses côtés ou perpendiculairement ou sous des angles égaux quelconques , & que le rectangle , sous deux de ces lignes $PQ \times PR$, soit égal au rectangle sous les deux autres $PS \times PT$, la section conique sera un cercle. Ce fera la même chose , si les quatre lignes sont menées sous des angles quelconques , & que le rectangle de deux de ces lignes $PQ \times PR$ soit au rectangle des deux autres $PS \times PT$, comme le rectangle des sinus des angles S & T , sous lesquels les deux dernières lignes PS , PT ont été menées , est au rectangle des sinus des angles Q & R sous lesquels on a mené les deux premières PQ , PR .

Dans les autres cas , le lieu du point P fera quelqu'une des trois figures qu'on appelle ordinairement *sections coniques*.

On peut à la place du trapeze $ABCD$ employer un quadrilatere , dont les deux côtés opposés se coupent mutuellement comme des diagonales. Il se peut aussi que des quatre points A , B , C , D un ou même deux soient placés à une distance infinie : alors les côtés de la figure qui convergeoient précédemment vers ces points deviendront parallèles , & la section conique passera par les autres points , & s'étendra à l'infini du même côté que ces lignes devenues parallèles.

L E M M E X I X.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. 45. Les quatre lignes AB, CD, AC, BD étant données de position, trouver un point P tel qu'en tirant à ces quatre lignes les droites PQ, PR, PS, PT qui fassent avec elles des angles respectivement égaux à quatre angles donnés, le rectangle $PQ \times QR$ de deux de ces quatre lignes, soit au rectangle $PS \times PT$ des deux autres en raison donnée.

Ayant tiré une ligne quelconque AH par un des quatre points A, B, C, D , dans lesquels se rencontrent les lignes AB, CD, AC, BD , soit proposé de trouver sur cette ligne un point P qui ait la propriété demandée.

Fig. 45. Pour y parvenir, supposant que $H \& I$ soient les points où cette ligne AH rencontre les lignes $BD \& CD$, on remarquera que puisque tous les angles de la figure sont donnés, les raisons de PQ à $PA \&$ de PA à PS seront données, & que par conséquent la raison de PQ à PS le sera aussi. Orant donc cette raison de la raison donnée $PQ \times PR$ à $PS \times PT$, on aura la raison de PR à PT , & en ajoutant les raisons données de PI à PR , & de PT à PH , on aura la raison de PI à PH , & par conséquent le point P . C. Q. F. T.

Cor. 1. On tire de-là la manière de mener une tangente à un point quelconque D du lieu des points P ; car la corde PD devient tangente lorsque les points $P \& D$ coïncident, c'est-à-dire lorsque AH passe par le point D . Dans ce cas, la dernière raison des évanouissantes $IP \& PH$ se trouvera comme ci-dessus. Menant donc CF parallèle à AD , qui rencontre BD en F , & qui soit coupée en E dans cette dernière raison, DE sera tangente, à cause que $CF \&$ l'évanouissante IH sont parallèles & coupées de même en $E \&$ en P .

Fig. 46. Cor. 2. De-là suit encore la manière d'avoir le lieu de tous les points P . Par l'un des points A, B, C, D , comme A , menez la tangente AE , & par un autre point quelconque B , menez BF

parallele à cette tangente, & trouvez par le Lemme 19. le point *F* où cette droite rencontre le lieu.

Coupez ensuite *BF* en deux parties égales au point *G*, la droite indéfinie *AG* fera la position d'un diamètre auquel *BG* & *FG* seront ordonnées. La longueur *AH* de ce diamètre se trouvera en déterminant le point *H* où *AG* rencontre le lieu; & son parametre sera à *AH* comme BG^2 à $AG \times GH$. Si *AG* ne rencontre point le lieu, la ligne *AH* étant infinie, le lieu fera une parabole, & le parametre du diamètre *AG* sera $\frac{BG^2}{AG}$; mais si elle le rencontre quelque part, le lieu fera une hyperbole, lorsque les points *A* & *H* sont placés du même côté par rapport à *G*, & il fera un ellipse, lorsque le point *G* sera placé entre *A* & *H*, à moins que l'angle *AGB* ne fût droit; & que de plus BG^2 ne fut égal au rectangle $AG \times GH$; car dans ce cas le lieu feroit un cercle.

De cette façon le Problème des quatre lignes commencé par Euclide, & continué par *Apollonius* se trouve résolu dans ce Corollaire, non par le calcul, mais par une composition Géométrique telle que celle par laquelle les anciens l'ont cherché.

LE M M E XX.

Si un parallélogramme quelconque ASPQ a ses deux angles opposés A & P placés dans une section conique; & que les côtés AQ, AS d'un de ses angles étant prolongés rencontrent la même section conique en B & C; en tirant des points de concours B & C à un cinquième point quelconque D de la section conique les deux lignes BD, CD qui rencontrent en T & en R les deux autres côtés PS, PQ du parallélogramme prolongés indéfiniment: les parties PR & PT seront toujours entr'elles en raison donnée, & réciproquement, si ces parties sont entr'elles en raison donnée, le point D sera à la section conique qui passe par les quatre points A, B, C, P.

Cas 1. Soient tirés *BP*, *CP*, & du point *D* les droites *DG*, *DE*, dont la première *DG* soit parallele à *AB*, & rencontre *PB*,

LIVRE
PREMIER.

Fig. 46.

Fig. 47.

PQ, *CA* en *H, I, G*; & dont la seconde *DE* soit parallèle à *AC*, & rencontre *PC, PS, AB*, en *F, K, E*, à cause que *PQ: IQ* (ou *DE*)::*PB: BH::PT: DH*, & que *PR: DF::RC: DC::IG* (ou *PS*):*DG*; on aura les deux proportions *PQ: PT::DE: DH* & *PR: PS::DF: DS*, qui donneront étant composées *PQ × PR: PS × PT::DE × DF: DG × DH*; mais par le Lemme 17. *DE × DF: DG × DH* en raison donnée, de plus, *PQ* & *PS* sont données; donc la raison de *PR* à *PT* est donnée.

Cas 2. Si *PR* & *PT* sont supposées entr'elles en raison donnée, en reprenant le même raisonnement, on trouvera que le rectangle *DE × DF* est au rectangle *DG × DH* en raison donnée, & qu'ainsi, par le Lemme 18. le point *D* est à la section conique qui passe par les points *A, B, C, P*. C. Q. F. D.

Cor. 1. Donc, si on tire *BC* qui coupe *PQ* en *r*, & que sur *PT* on prenne *Pt* à *pr*, dans la même raison que *PT* à *PR*, *Bt* sera tangente de la section conique au point *B*; car supposez que le point *D* coïncide avec le point *B*, la corde *BD* s'évanouissant, *BT* deviendra tangente, & *CD* & *BT* coïncideront avec *CB* & *Bt*.

Cor. 2. Et réciproquement, si *Bt* est tangente, & que *BD, CD* se rencontrent en un point quelconque *D* de la section conique, on en conclura que *PR: PT::pr: Pt*, & de même *Bt* étant toujours tangente, si *PR: PT::Pr: Pt*, il s'ensuivra que les droites *BD* & *CD* se rencontreront dans un point quelconque *D* de la section conique.

Cor. 3. Une section conique ne peut couper une autre section conique en plus de quatre points; car supposant que cela pût être, imaginez que deux sections coniques eussent les cinq points *A, B, C, P, O* communs, & qu'elles fussent coupées l'une & l'autre par la ligne *BD* dans les points *D, d*; la droite *Cd* coupant la droite *PQ* en *q*, on auroit *PR: PT::Pq: PT*, ce qui donneroit *PR = Pq*, contre l'hypothèse.

L E M M E X X I.

LIVRE
PREMIER.

Si aux deux points donnés ou poles B, C sont fixés les sommets de deux angles donnés MBD, MCD, & que l'on fasse parcourir la droite donnée MN, au concours M des côtés BM & CM de ces angles les deux autres côtés BD & CD des mêmes angles décriront par leur intersection une section conique. Et réciproquement, si les droites BD, CD décrivent par leur concours D une section conique qui passe par les points donnés A, B, C, & que les angles DBM, DCM soient pris respectivement égaux aux angles donnés ABC, ACB, la rencontre des côtés BM, CM se fera toujours dans une ligne droite donnée de position.

Fig. 48.

Supposant que *N* soit un point donné de la droite *MN*, par lequel on fasse passer les côtés *BM*, *CM* des angles mobiles, & que *D* soit le point dans lequel se rencontre les autres côtés des mêmes angles; soient tirées *CN*, *BN*, *CP*, *BP*, soient tirées ensuite du point *P* les droites *PT*, *PR*, qui rencontrent *BD*, *CD* en *T* & en *R*, & qui fassent l'angle *BPT* égal à l'angle donné *BNM*, & l'angle *CPR* égal à l'angle donné *CNM*, comme (par l'hypothèse) les angles *MBD*, *NBP* sont égaux, ainsi que les angles *MCD*, *NCP*; en ôtant les angles communs *NBD*, *NC D*, il restera les angles égaux *NBM* & *PBT*, *NCM* & *TCR*. De-là il suit que les triangles *NBM*, *PBT* sont semblables, ainsi que les triangles *NCM*, *PCR*. C'est pourquoi *PT*:*NM*::*PB*:*NB*, & *PR*:*NM*::*PC*:*NC*. Or les points *B*, *C*, *N*, *P* sont immobiles, donc *PT* & *PR* sont en raison donnée avec *NM*, ou, ce qui revient au même, elles sont en raison donnée l'une à l'autre; donc, par le Lemme 20. le point *D*, concours perpétuel des droites mobiles *BT* & *CR*, sera à la section conique qui passe par les points *B*, *C*, *P*. C. Q. F. D.

Fig. 48.

Et réciproquement, si le point mobile *D* est à une section conique qui passe par les points donnés *B*, *C*, *A*; que les angles *DBM*, *DCM* soient respectivement égaux aux angles *ABC*,

Fig. 49.

Fig. 49.

ACB ; & que faisant coïncider successivement le point D avec les deux points donnés p, P de la section conique, on détermine les points n & N avec lesquels le point coïncide successivement par cette opération, la droite nN sera le lieu de tous les points M . Car supposez que le point M soit à quelque courbe; dans ce cas le lieu des points D déterminé par cette courbe, feroit une section conique qui passeroit par les cinq points B, C, A, p, P ; mais, par ce qui a été démontré, le lieu des points D , lorsque les points M sont dans une ligne droite, est encore une section conique qui passe par les mêmes points B, C, A, p, P . On auroit donc, par la supposition que le point M est dans une courbe, deux sections coniques qui passeroient par les cinq mêmes points, ce qui est impossible par le Cor. 3. du Lemme 20. donc cette supposition est absurde.

PROPOSITION XXII. PROBLÈME XIV.

Faire passer une trajectoire par cinq points donnés.

Fig. 50.

Soient donnés les cinq points A, B, C, P, D . D'un de ces points A soient menées les droites AB, AC à deux autres quelconques B & C , qu'on prend pour poles, & soient menées par le quatrième point P deux lignes TPS, PRQ parallèles aux deux lignes AB, AC . Soient tirées ensuite des deux poles B, C , au cinquième point D deux lignes indéfinies, dont l'une BDT rencontre TPS en T , & l'autre CRD rencontre PRQ en R . Cela fait, en tirant d'un point quelconque t de la droite indéfinie $SP T$ la droite trp parallèle à TR , la rencontre d des lignes $Cr d$, & Bt sera à la trajectoire cherchée; car ce point d (par le Lemme 20.) fera à la section conique qui passe par les quatre points A, B, C, P ; de plus, les lignes Rr, Tt s'évanouissant, le point D coïncide avec le point d . Donc la section conique passe par les cinq points A, B, C, P, D . C. Q. F. D.

AUTRE SOLUTION.

Fig. 51.

Joignez par des lignes droites trois quelconques A, B, C , des points

donnés ; prenant ensuite les deux points B & C pour poles , appliqués successivement aux points D & P , les côtés BA & CA des angles ABC , ACB , & marquez les points M & N dans lesquels les autres côtés de ces angles se rencontrent dans ces deux positions. Cela fait , tirez la droite indéfinie MN , & faites parcourir cette ligne à l'intersection continue m des côtés BL , CL des angles ABC , ACB ; & vous aurez alors par l'intersection continue d des autres côtés de ces mêmes angles la trajectoire cherchée $PADdB$.

Car le point d (par le Lemme 21.) fera à la section conique qui passe par les points B , C ; & lorsque le point m coïncidera avec les points L , M , N , le point d , par la construction , coïncidera avec les points A , D , P . Ainsi il décrira la section conique qui passe par les cinq points A , B , C , P , D . C. Q. F. F.

Cor. 1. On peut mener très-aisément par ce moyen une droite qui touche la trajectoire cherchée dans un point quelconque donné B . Car en faisant coïncider le point d avec le point B , la droite Bd fera la tangente cherchée.

Cor. 2. De-là on aura le centre , le diamètre , & le paramètre de la trajectoire , comme dans le Cor. 2. du Lemme 19.

S C H O L I E.

La construction précédente deviendra un peu plus simple en tirant BP , & prenant sur cette ligne prolongée , s'il est besoin , $Bp : BP :: PR : PT$; & en tirant par p une ligne infinie pe parallèle à SPT ; car il ne faudra que prendre sur cette ligne la partie pe égale à l'intervalle quelconque Pr , & tirer les lignes Cr , Be , pour avoir par leur rencontre un point quelconque de la trajectoire. On verra aisément la raison de cette construction en remarquant , que puisque les raisons de Pr à Pt , de PR à PT , de pB à PB , & de pe à Pt , sont égales , il faut donc que pe & Pr soient égales entr'elles.

Lorsqu'on ne voudra pas employer la construction mécanique

LIVRE
PREMIER

Fig. 514

Fig. 515

Fig. 52.

de la seconde solution, celle-ci sera d'une grande commodité dans la pratique.

PROPOSITION XXIII. PROBLÈME XV.

Décrire une trajectoire qui passe par quatre points donnés & qui ait pour tangente une droite donnée de position.

Cas 1. Que la tangente HB , le point de contact B , & trois autres points C, D, P soient donnés. Joignez les points B & C par la ligne BC , tirez PS parallèle à BH & PQ parallèle à BC ; achevez le parallélogramme $BSPQ$; tirez ensuite BD qui coupe SP en T , & CD qui coupe PQ en R . Enfin, ayant mené une droite quelconque tr parallèle à TR , prenez sur PQ & sur PS les abscisses Pr, Pt respectivement proportionnelles aux lignes PR, PT ; & le point d , concours des lignes Cr, Bt , sera toujours, par le Lemme 20. à la trajectoire qu'il falloit décrire. *C. Q. F. F.*

Fig. 53.

AUTRE SOLUTION.

Faisant tourner l'angle CBH autour du pole B , ainsi que le rayon rectiligne quelconque DC , prolongé des deux côtés, autour du pole C , soient marqués les points M & N , dans lesquels le côté BC de l'angle coupe ce rayon, lorsque l'autre côté BH concourt avec ce même rayon dans les points P & D . Faisant ensuite mouvoir le rayon CD & le côté BC de l'angle CBH , de manière, que leur concours soit toujours dans la droite indéfinie MN , on aura alors par la rencontre continuelle de l'autre côté BH de l'angle CBH , avec le même rayon CD , la trajectoire cherchée.

Fig. 54.

Car, si dans les constructions du problème précédent, le point A se confond avec le point B , les lignes AC & CB coïncideront, & la ligne AB , dans sa dernière position, deviendra la tangente BH ; ce qui changera ces constructions dans celles qu'on vient de décrire. Le concours du côté BH & du rayon, décrira donc la section conique qui passe par les points C, D, P , & qui touche la droite BH au point B . *C. Q. F. F.*

Fig. 53. & 54.

Cas 2.

Cas 2. Soient donnés quatre points B, C, D, P placés hors de la tangente HI .

LIVRE
PREMIER.

Tirez les lignes BD, CP , qui concourent en G , & qui rencontrent la tangente en H & en I . Coupez ensuite cette tangente en A , en sorte que HA soit à IA , comme le rectangle de la moyenne proportionnelle entre CG & GP , & de la moyenne proportionnelle entre BH & HD est au rectangle de la moyenne proportionnelle entre DG & GB , & de la moyenne proportionnelle entre PI & IC ; & le point A sera le point de contact. Car si la ligne HX , parallèle à la droite PI , coupe la trajectoire dans les points quelconques X & Y , il faudra, par les coniques, que la position du point A soit telle que AH^2 soit à AI^2 , en raison composée de la raison du rectangle $XH \times HY$ au rectangle $BH \times HD$, ou du rectangle $CG \times GP$ au rectangle $DG \times GB$, & de la raison du rectangle $BH \times HD$ au rectangle $PI \times IC$. Ayant donc trouvé le point de contact A , on décrira la trajectoire comme dans le premier cas. C. Q. F. F.

Fig. 55.

Il est à remarquer qu'on peut prendre le point A entre les points H & I , ou sur le prolongement de HI , ce qui donne deux solutions du Problème.

PROPOSITION XXIV. PROBLÈME XVI.

Décrire une trajectoire qui passe par trois points donnés, & qui soit touchée par deux lignes droites données de position.

Par deux quelconques B & D des trois points donnés B, C, D , tirez la droite indéfinie BD qui rencontre les tangentes données HI, KL dans les points H & K , ensuite par le point D , & par le troisième point donné C , tirez la droite indéfinie CD , qui rencontre les mêmes tangentes aux points I & L . De plus, coupez ces lignes en R & en S , de sorte que HR soit à KR comme la moyenne proportionnelle entre BH & HD est à la moyenne proportionnelle entre BK & KD ; & que IS soit à LS comme la moyenne proportionnelle entre CI & ID est à

Fig. 56.

Fig. 56.

la moyenne proportionnelle entre CL & LD . Cela fait, soit que vous ayez pris les points R & S entre les points K & H , I & L , ou sur les prolongemens de KH & de IL , ainsi que cela est permis, vous aurez, par les rencontres de la ligne RS avec les tangentes HI & KL , les points d'attouchement A & P .

Car si on suppose que A & P soient les points d'attouchement placés quelque part dans les tangentes, & que par un point quelconque I , des points H, I, K, L , placé sur l'une ou l'autre tangente HI , on tire la droite IY parallèle à l'autre tangente KL , & qui rencontre la courbe en X & en Y , & qu'on prenne IZ moyenne proportionnelle entre IX & IY : on aura, par les coniques, le rectangle $XI \times IY$ ou IZ^2 à LP^2 , comme le rectangle $CI \times ID$ au rectangle $CL \times LD$, c'est-à-dire, par la construction, comme SI^2 à SL^2 : d'où l'on tirera que $IZ:LP::SI:SL$, & que par conséquent les points S, P, Z sont en ligne droite. De plus, les tangentes concourant au point G , on aura encore par les coniques le rectangle $XI \times IY$ ou $IZ^2:IA^2::GP^2:GA^2$, qui donne $IZ:IA::GP:GA$. Donc, les points P, Z & A sont en ligne droite, & par conséquent les points S, P & A , y sont aussi. On prouvera par le même raisonnement que les points R, P & A , sont en ligne droite. Donc les points d'attouchement A & P sont dans la droite RS .

Ayant ainsi les points d'attouchement A & P , on décrira la trajectoire comme dans le premier cas du Problème précédent. C. Q. F. F.

Fig. 56.

Dans cette Proposition, & dans le second Cas de la Proposition précédente les constructions sont les mêmes, soit que la droite XY coupe la trajectoire en X & en Y , soit qu'elle ne la coupe point; puisque les opérations qu'on a faites ne dépendent point de cette section. Or ayant démontré les constructions pour le cas où XY rencontre la trajectoire, il sera aisé d'en tirer la démonstration pour le cas où elle ne la rencontre pas; je ne m'y arrêterai donc pas de crainte d'être trop long.

L E M M E X X I I.

LIVRE
PREMIER.*Changer les figures en d'autres figures du même genre.*

Étant proposé de transformer la figure quelconque HGI , soient menées à volonté deux droites parallèles AO , BL qui coupent en A & en B une troisième droite quelconque AB donnée de position; soit de plus menée la parallèle GD à OA par un point quelconque G de la figure donnée. Tirant ensuite du point O donné dans AO , au point D , la droite OD qui rencontre BL en d , & élevant sur ce point d la droite dg , qui fasse avec la droite BL un angle quelconque donné, & qui ait à $O d$ la même raison que DG à OD ; g sera le point qui dans la figure nouvelle hgi répond au point G , de la même manière chaque point de la première figure donnera autant de points de la figure nouvelle; & si on imagine que le point G parcourt d'un mouvement continu tous les points de la première figure, le point g parcourra de même, par un mouvement continu, tous les points de la nouvelle figure.

Fig. 57.

Afin d'être plus clair, nous appellerons DG première ordonnée, & dg nouvelle ordonnée; AD première abscisse, & ad abscisse nouvelle; O pôle, OD rayon coupant, OA premier rayon ordonné, & la droite Oa , qui achève le parallélogramme $OABa$, nouveau rayon ordonné.

Cela posé, si le point G est à une ligne droite donnée de position, le point g sera aussi à une ligne droite donnée de position. Si le point G est à une section conique, le point g sera aussi à une section conique. Je mets ici le cercle au nombre des sections coniques. De plus, si le point G est à une ligne du troisième ordre, le point g sera de même à une ligne du troisième ordre; il en sera de même des courbes des ordres plus élevés, c'est-à-dire, que les deux lignes auxquelles seront les points G & g seront toujours du même degré.

Car Od étant à OD , dg à DG , & AB à AD , comme ad

Fig. 57.

à OA , on aura $AD = \frac{OA \times AB}{ad}$, & $DG = \frac{OA \times dg}{ad}$.

Donc, si le point G est à une ligne droite, dans l'équation quelconque, qui exprime la relation entre l'abscisse AD & l'ordonnée DG , les indéterminées DG & AD n'ayant qu'une dimension, en écrivant dans cette équation $\frac{OA \times AB}{ad}$ pour AD & $\frac{OA \times dg}{ad}$ pour DG , on aura une équation nouvelle, dans laquelle la nouvelle abscisse ad & la nouvelle ordonnée dg n'auront aussi qu'une dimension, & cette équation exprimera par conséquent une ligne droite. Si AD & DG , ou seulement l'une des deux, avoit deux dimensions dans la première équation, ad & dg en auroient aussi deux dans la seconde; & il en seroit de même si elles avoient trois dimensions, ou des dimensions plus hautes. Ainsi les indéterminées ad , dg dans la seconde équation, & AD , DG dans la première, auront toujours le même nombre de dimensions, & par conséquent les lignes auxquelles sont les points G & g sont du même degré.

De plus, si une ligne droite touche la ligne courbe dans la première figure; la droite qui lui répondra dans la nouvelle figure touchera la courbe de la même manière; & au contraire. Car si deux points d'une courbe quelconque s'approchent l'un de l'autre, & qu'ils se confondent dans la première figure, les mêmes points correspondans dans la figure nouvelle s'approcheront & se confondront aussi; donc, les droites qui joignent ces points deviendront en même temps tangentes des courbes dans l'une & l'autre figure.

Les démonstrations de ces Propositions pourroient être présentées d'une manière plus conforme aux démonstrations géométriques ordinaires; mais je préfère la brièveté.

Si c'est une figure rectiligne qu'il faut transformer, il suffira de joindre par des lignes, dans la nouvelle figure, les points cor-

respondans à ceux qui sont les interfections des lignes dont la premiere figure est composée. Si la figure à transformer est curviligne, il faut transporter dans la nouvelle figure les points, les tangentes, & les autres droites par lesquelles on peut décrire la courbe.

LIVRE
PREMIER.

Ce Lemme sert à résoudre des Problèmes très difficiles, en transformant les figures proposées en de plus simples. Car on peut transformer les lignes convergentes en des lignes paralleles, en prenant pour premier rayon ordonné une ligne droite quelconque qui passe par le point de concours des lignes convergentes; parce que, dans ce cas, le point de concours dans la nouvelle figure s'éloignera à l'infini, & ensuite lorsqu'on a résolu le Problème dans la nouvelle figure, on n'aura plus qu'à repasser, par des opérations inverses, de la nouvelle figure à la premiere, & le Problème sera résolu.

Ce Lemme est encore fort utile dans la solution des Problèmes solides; car toutes les fois qu'on a deux sections coniques, de l'interfection desquelles dépend la solution du Problème, on pourra transformer l'une ou l'autre, soit hiperbole ou parabole, en une ellipse; & ensuite l'ellipse se change aisément en un cercle. De la même maniere, dans les Problèmes plans, la ligne droite & la section conique se changeront en une droite & un cercle.

PROPOSITION XXV. PROBLÈME XVII.

Décrire une trajectoire, qui passe par deux points donnés, & qui touche trois lignes droites données de position.

Par le concours de deux de ces tangentes, & par le concours de la troisième avec la ligne droite qui passe par les deux points donnés, tirez une droite indéfinie, & la prenant pour le premier rayon ordonné, changez la figure en une figure nouvelle, par le Lemme précédent. Dans cette nouvelle figure les deux tangentes qui concouroient seront paralleles entr'elles, & la troisième

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. 58.

fera parallèle à la droite qui passe par les deux points donnés. Que hi & kl représentent ces deux tangentes parallèles, ik la troisième tangente, hl la droite qui lui est parallèle, & qui passe par les points a & b , par lesquels la section conique doit passer dans cette nouvelle figure, & que $hikl$ soit le parallélogramme formé par ces quatre lignes. Cela posé, soient coupées les droites hi, ik, kl , en c, d, e , enforte que hc soit à $\sqrt{ah \times hb}$, ic à id , & ke à kd , comme $hi + kl$ à $ik + \sqrt{ah \times hb} + \sqrt{al \times lb}$, & les points c, d, e seront les points d'attouchement.

Car on voit, par les coniques, que $hc^2 : ah \times hb :: ic^2 : id^2 :: ke^2 : kd^2 :: el^2 : al \times lb$, ou ce qui revient au même que $hc : \sqrt{ah \times hb} :: ic : id :: ke : kd :: el : \sqrt{al \times lb}$, c'est-à-dire, (en ajoutant les antécédens ainsi que les conséquens) $hi + kl : ki + \sqrt{ah \times hb} + \sqrt{al \times lb}$, ce qui donne la construction qu'on vient d'énoncer.

Ayant donc les points d'attouchement c, d, e , dans la nouvelle figure, par des opérations inverses, on trouvera leurs points correspondans dans la première figure, & par le Problème 14. on décrira la trajectoire. C. Q. F. F.

Au reste, de la même manière que les points a & b seront entre les points h & l , ou bien sur le prolongement de la ligne qui joint ces points, les points c, d, e doivent être pris entre les points h, i, k, l , ou bien sur les prolongemens des lignes qui joignent ces points. Lorsque l'un des points a & b sera entre les points h & l , & l'autre sur le prolongement de la ligne qui les joint, le Problème sera impossible.

PROPOSITION XXVI. PROBLÈME XVIII.

Décrire une trajectoire qui passe par un point donné, & qui touche quatre droites données de position.

De l'intersection de deux de ces tangentes quelconques on tirera à l'intersection des deux autres une droite indéfinie, & la prenant pour le premier rayon ordonné, on transformera la fi-

gure par le Lemme 22. en une figure nouvelle. Par ce moyen chaque paire de tangentes qui concouroit dans le premier rayon ordonné deviendra une paire de tangentes paralleles.

Soient $i k h l$ le parallélogramme formé par les quatre nouvelles tangentes, & p le point qui répond dans la nouvelle figure au point donné dans la premiere; en tirant de ce point p au centre O du parallélogramme la droite $p O q$ double de $p O$, q fera un autre point de la section conique. On n'aura donc plus, en se servant du Lemme 22. qu'à retrouver par une opération inverse le point qui répond à ce point q dans la premiere figure, & le Problème sera réduit au précédent. C. Q. F. F.

LEMME XXIII.

Si deux lignes AC, BD , données de position, sont terminées par les points donnés A, B , & qu'elles aient entr'elles une raison donnée; que de plus la droite CD , qui joint les points indéterminés C, D , soit coupée en K dans une raison donnée: le point K sera à une droite donnée de position. Fig. 60.

E étant la rencontre des lignes AC, BD , soit pris sur BE l'intervalle BG qui soit à AE , comme BD à AC , soit prise ensuite FD qui soit toujours égale à la droite donnée EG ; on aura par la construction $EC:GD$, (ou EF) :: $AC:BD$, & par conséquent en raison donnée; ainsi le triangle EFC est donné d'espece. Soit coupée maintenant CF en L , en sorte que $CL:CF::CK:CD$; il est clair, à cause que cette raison est donnée, que le triangle EFL sera aussi donné d'espece; donc le point L sera à la droite EL donnée de position. Tirant alors LK , il est clair que les triangles CLK, CDF seront semblables, & qu'à cause que FD est donnée, ainsi que la raison de LK à FD , la droite LK sera aussi donnée. Donc en prenant $EH=LK$, & en menant HK , cette droite sera donnée de position, & sera celle qui passe par tous les points K . C. Q. F. D.

Corol. A cause que la figure $EFLC$ est donnée d'espece, les

LIVRE
PREMIER.

Fig. 59.

Fig. 60.

Fig. 60.

trois droites EF, EL & EC , ou GD, HK & EC auront des raisons données entr'elles.

L E M M E XXIV.

Si trois droites touchent une section conique quelconque, & que deux de ces droites soient parallèles & données de position; celui des demi diamètres de cette section conique qui sera le demi diamètre parallèle à ces deux lignes, sera moyen proportionnel entre les segments de ces lignes compris entre les points d'attouchement, & la troisième tangente.

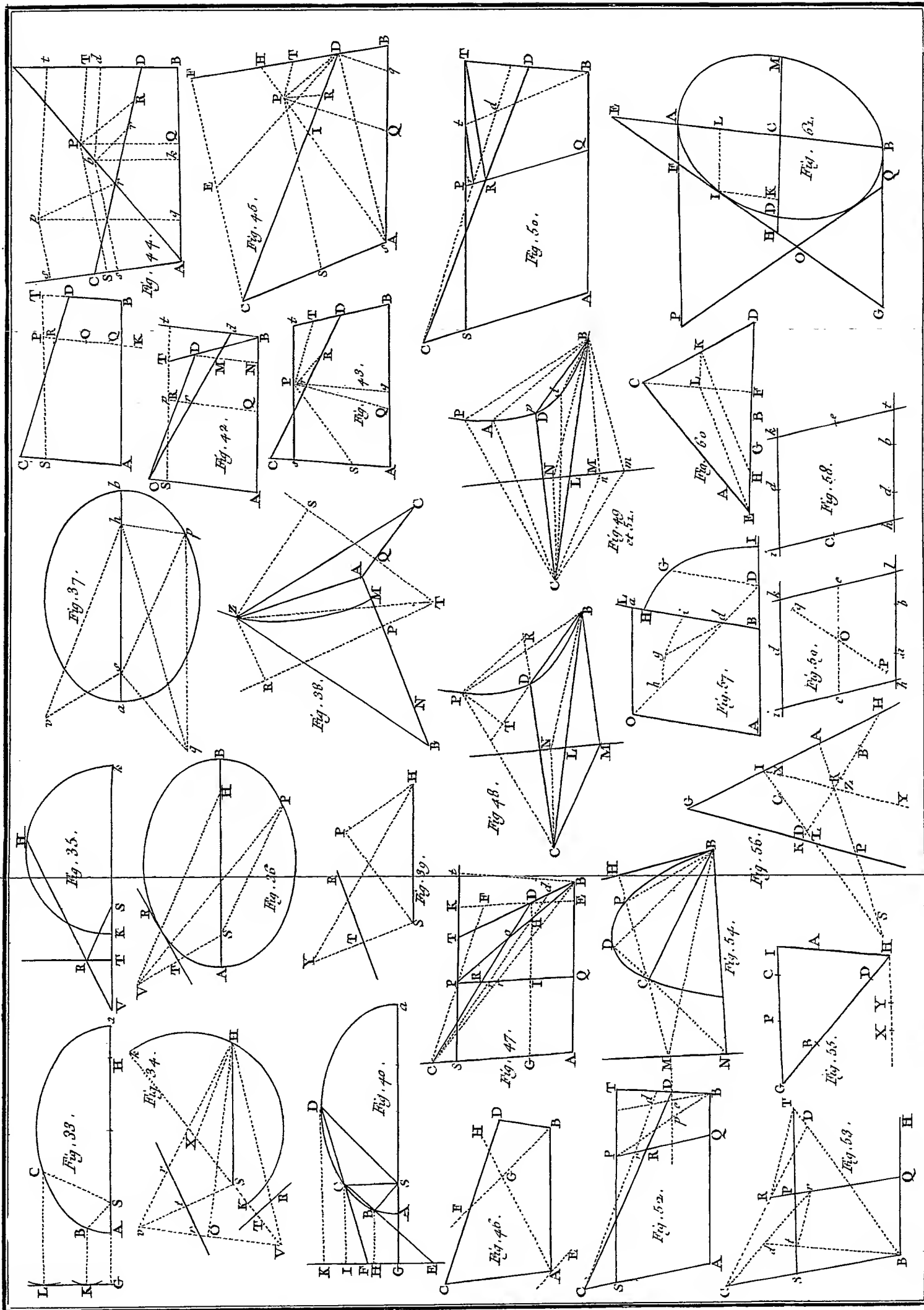
Fig. 61.

Soient AF, BG les deux parallèles qui touchent la section conique ADB en A & en B ; EF la troisième droite qui touche la même courbe en I , & qui rencontre les deux premières tangentes en F & en G ; soit de plus CD le demi diamètre de la figure parallèle aux tangentes: il s'agit de démontrer que les lignes AF, CD, BG sont en proportion continue.

Pour le faire voir, soit prolongé le diamètre MCD jusqu'à ce qu'il rencontre en H la tangente FG , & soit tiré le diamètre conjugué ACB . En formant le parallélogramme $IKLC$; on aura, par la nature des sections coniques, $EC:CA::CA:CL::EC-CA:CA-CL$, ou $::EA:AL$, & par conséquent $EA:EA+AL$ (ou EL) $::EC:EC+CA$ (ou EB); donc, à cause que les triangles EAF, ELI, ECH, EBG sont semblables, $AF:LI::CH:BG$. Mais, par la nature des coniques, LI ou $CK:CD::CD:CH$; donc $AF:CD::CD:BG$. C. Q. F. D.

Cor. I. De-là, si deux tangentes FG, PQ se coupent en O , & rencontrent les tangentes parallèles AF, BG en F & G, P & Q ; on aura $AF:BQ::AP:BG$, & par conséquent $::FP:GQ$; c'est-à-dire $::FO:OG$.

Cor. 2. Ainsi deux droites PG, FQ menées par les points P & G, F & Q auront leur commune intersection dans la droite ACB , qui passe par le centre de la figure; & par les points d'attouchement A & B .



Si les quatre côtés d'un parallélogramme prolongés indéfiniment touchent une section conique quelconque, & qu'ils soient coupés par une cinquième tangente quelconque, en prenant sur deux côtés quelconques opposés de ce parallélogramme les segmens terminés à deux angles opposés, chacun de ces segmens sera au côté duquel il aura été retranché par la cinquième tangente, comme la partie de l'autre côté du parallélogramme, comprise entre le point d'attouchement & le troisième côté, est à l'autre segment.

ML, IK, KL, MI étant les quatre côtés d'un parallélogramme $MLIK$ qui touchent la section conique en A, B, C, D ; & FQ une cinquième tangente qui coupe ces côtés en F, Q, H, E : si on prend les segmens ME, KQ des côtés MI, KI , on aura $ME:MI::BK:KQ$, & si on prend les segmens KH, MF des côtés ML, KL , on aura $KH:KL::AM:MF$.

Fig. 62.

Car par le Corollaire premier du Lemme précédent, on aura $ME:MI::AM$ ou $BK:BQ$; d'où l'on tire $ME:MI::BK:KQ$. C. Q. F. D.

Par le même Corollaire on aura $KH:HL::BK$ ou $AM:AF$, qui donne $KH:KL::AM:MF$. C. Q. F. D.

Cor. 1. De-là, si le parallélogramme $IKLM$ décrit autour de la section conique est donné, le rectangle $KQ \times ME$ sera donné, ainsi que le rectangle $KH \times MF$, qui lui est égal, à cause que les triangles MFE, KQH sont semblables.

Cor. 2. Si on mène une sixième tangente eq qui rencontre les tangentes KI, MI , en q & en e ; le rectangle $KQ \times ME$ étant égal au rectangle $Kq \times Me$, on aura $KQ:Me::Kq:ME$, & par conséquent $Qq:Ee$.

Cor. 3. D'où, si on tire Eq & eQ , qu'on les coupe en deux parties égales, & qu'on tire une droite par les points de bisection, cette droite passera par le centre de la section conique. Car puisque $Qq:Ee::KQ:Me$, il faut, par le Lemme 23. que la droite qui

passé par le milieu de Eg & de eQ , passé aussi par le milieu de MK . Or, le milieu de MK est le centre de la section conique.

PROPOSITION XXVII. PROBLÈME XIX.

Décrire une trajectoire qui soit touchée par cinq lignes droites données de position.

Les tangentes ABG , BCF , GCD , FDE , EA étant données de position, coupez en deux parties égales aux points M & N les diagonales AF , BE de la figure quadrilatère $ABFE$ formée par quatre quelconques de ces tangentes, & par le Cor. 3. du Lem. 25. la droite MN menée par les points de bisection passera par le centre de la trajectoire. Coupez ensuite en deux parties égales dans les points P & Q les diagonales BD , GF de la figure quadrilatère $BGDF$, formée par quatre autres des cinq mêmes tangentes: & la droite PQ tirée par les points de bisection passera encore par le centre de la trajectoire; ainsi la rencontre O de MN & de PQ donnera la position de ce centre. Tirez ensuite KL parallèle à une tangente quelconque BC , & à une telle distance de cette tangente, que le centre O soit placé au milieu de l'intervalle qui sépare ces parallèles, KL fera par ce moyen une nouvelle tangente de la trajectoire qu'il faut décrire. Que L & K soient les points où cette nouvelle tangente coupe deux quelconques GCD , FDE , des premières, en menant des droites CK , FL par les points C & K , F & L où les tangentes parallèles CF , KL rencontrent les tangentes non parallèles CL , FK , on aura par la rencontre R de ces droites, & par le centre O la position de la ligne RO qui coupe les deux tangentes CF , KL dans les points où ces deux tangentes touchent la section conique cherchée, ainsi qu'il est aisé de s'en assurer par le Cor. 2. du Lemme 24. Trouvant ensuite les autres points de contact par la même méthode, il sera aisé de décrire la trajectoire par le Probl. 14.

Les Problèmes, dans lesquels les centres ou les asymptotes des trajectoires sont donnés, sont contenus dans les précédens; car, par le moyen des points de ces trajectoires qui seront donnés, de leurs tangentes, & du centre, on aura autant d'autres points, & d'autres tangentes prises de l'autre côté du centre & à égale distance. A l'égard des asymptotes on peut les regarder comme des tangentes, & leurs extrémités (si l'on peut s'exprimer ainsi) comme des points de contact. Imaginez donc que le point d'attouchement d'une tangente s'éloigne à l'infini; cette tangente deviendra asymptote, & les constructions des Problèmes précédens se changeront dans les constructions des Problèmes où l'asymptote est donnée.

Lorsque la trajectoire est décrite, on peut trouver ses axes & ses foyers par la méthode suivante. Dans la construction & la figure du Lemme 21. faites que les côtés BP , CP des angles mobiles PBN , PCN , par le concours desquels la trajectoire a été décrite, deviennent parallèles entr'eux, & qu'en conservant cette position, ils tournent dans cette figure autour de leurs poles B & C . Pendant ce mouvement les seconds côtés CN , BN de ces angles décriront par leur concours K ou k le cercle $BCKC$. Du centre O de ce cercle tirez la ligne OH qui rencontre le cercle en K & en L , & qui soit perpendiculaire sur la règle MN , sur laquelle ces seconds côtés CN , BN se sont rencontrés en décrivant la trajectoire: lorsque ces seconds côtés arrivés en CK , BK se couperont en K dans le point le plus proche de cette règle, les premiers côtés CP , BP seront alors parallèles au grand axe, & perpendiculaires au petit; ce seroit le contraire, si ces mêmes côtés concouroient au point le plus éloigné L . Donc, si le centre de la trajectoire est donné, on aura par ce moyen la longueur des axes, & la position des foyers s'en tirera tout de suite.

Les quarrés des axes sont entr'eux comme KH à LH ; ce qui donne un moyen facile de décrire par quatre points quelcon-

Fig. 64. & 65.

ques une trajectoire donnée d'espece. Car si on prend deux de ces points donnés pour les poles B & C , le troisième donnera les angles mobiles, PCK , PBK ; & ces angles étant donnés, on connoîtra aussi-tôt le cercle BCK . Or, la trajectoire étant donnée d'espece, la raison de OH à OK sera donnée, & par conséquent OH le sera aussi. Décrivant donc du centre O , & de l'intervalle OH un autre cercle, la droite qui touchera ce cercle, & qui passera par le concours des seconds côtés CK , BK , lorsque les premiers CP , PB concourent au quatrième point donné, fera la règle MN par le moyen de laquelle on peut décrire facilement la trajectoire. Par la même méthode on pourra aussi inscrire un trapeze donné d'espece dans une section conique donnée quelconque toutes les fois que le cas sera possible.

Il y a encore d'autres Lemmes par lesquels on peut décrire des trajectoires données d'espece lorsqu'on a des points donnés, & des tangentes données. Tel est par exemple celui-ci. Si d'un point donné on mène à volonté une ligne droite, qui coupe une section conique donnée en deux points, & que l'intervalle de ces intersections soit partagé en deux parties égales, le point de bisection fera à une autre section conique de la même espece que la première, & les axes de ces deux courbes seront paralleles entr'eux; mais je passe à des choses plus utiles.

L E M M E X X V I.

Placer les trois côtés d'un triangle donné de grandeur & d'espece, en sorte que ses trois angles soient respectivement appliqués sur trois lignes données de position, mais qui ne sont pas toutes paralleles entr'elles.

Les trois lignes indéfinies AB , AC , BC , étant données de position, il s'agit de placer le triangle DEF de façon que son angle D soit placé sur la ligne AB , l'angle E sur la ligne AC , & l'angle F sur la ligne BC .

On commencera par décrire sur DE , DF , & EF les trois segments de cercles DRE , DGF , EMF capables d'angles qui soient

respectivement égaux aux angles BAC , ABC , ACB , en observant, pour la position de ces segmens sur les lignes DE , DF , EF , que les lettres $DRED$ ayent entr'elles le même ordre que les lettres $BACB$, les lettres $DGFD$ le même ordre que les lettres $ABCA$, & les lettres $EMFE$ le même ordre que les lettres $ACBA$.

Ayant ensuite achevé les cercles de ces segmens & marqué la rencontre G des deux premiers, dont les centres sont P & Q , on tirera GP & PQ , & l'on prendra Ga à AB , comme GP à PQ . Cela fait, du centre G & de l'intervalle Ga on décrira un cercle qui coupera le premier cercle DGE en a . Tirant alors aD & aE , ces deux droites couperont, l'une le second cercle DFG en b , l'autre le troisième cercle EMF en c : & l'on aura par ce moyen la figure $ABCdef$ égale & semblable à la figure demandée $abcDEF$. Fig. 66. & 67

Pour le démontrer soit tiré Fc , & soit d'abord supposé que n soit le point où cette ligne rencontre aD , soient tirées ensuite aG , bG , QG , QD , PD . L'angle EaD étant égal par construction à l'angle CAB , & l'angle acF à l'angle ACB , le triangle anc sera équiangle au triangle ABC . Donc l'angle anc ou FnD , sera égal à l'angle ABC , & par conséquent à l'angle FbD ; donc, le point n coïncidera avec le point b ; de plus, l'angle GPQ , qui est la moitié de l'angle au centre GPD , est égal à l'angle à la circonférence GaD ; & l'angle GQP , qui est la moitié de l'angle au centre GQD , est égal au complément à deux droits de l'angle à la circonférence GbD ; donc, il est égal à l'angle Gba . De-là il suit que les triangles GPQ , Gab sont semblables, & que par conséquent $Ga:ab::GP:PQ$; c'est-à-dire, par la construction, $ga:AB$. Donc $ab=AB$; donc les triangles abc , ABC , que nous venons de prouver semblables, sont aussi égaux. Or, comme les angles D , E , F du triangle DEF sont appliqués respectivement sur les côtés ab , ac , bc du triangle abc , on n'a plus qu'à achever la figure $ABCdef$, de façon qu'elle

soit égale & semblable à la figure $abcDEF$, & le Problème sera résolu. *C. Q. F. F.*

Cor. On peut par cette méthode tirer une droite dont les parties données de longueur soient placées entre trois droites données de position. Car imaginant que le point D s'approche du côté EF , & que les côtés DE , DF deviennent le prolongement l'un de l'autre, le triangle DEF se changera en une droite, dont la partie donnée DE doit être placée entre les lignes données de position AB , AC & la partie donnée DF entre les lignes AB , BC données aussi de position; appliquant donc la construction précédente à ce cas, on résoudra le Problème.

Fig. 66. & 67.

PROPOSITION XXVIII. PROBLÈME XX.

Décrire une trajectoire donnée d'espece & de grandeur, dont les parties données soient placées entre trois lignes droites données de position.

Qu'on ait à décrire une trajectoire semblable & égale à la courbe DEF , & coupée par trois lignes droites AB , AC , BC données de position, en des parties égales & semblables aux parties données DF , FE de cette courbe.

Fig. 68. & 69.

Tirez les droites DE , EF , DF , & placez par le Lemme 26 les angles D , E , F de ce triangle DEF sur ces lignes données de position, ensuite décrivez autour de ce triangle une trajectoire semblable & égale à la courbe DEF . *C. Q. F. F.*

LEMME XXVII.

Décrire un trapeze donné d'espece, dont les angles soient appliqués respectivement sur quatre lignes droites données de position, en supposant que ces quatre lignes ne soient ni toutes parallèles, ni convergentes à un seul point.

Fig. 70. & 71. Que les quatre droites ABC , AD , BD , CE soient données de position, la première coupant la seconde en A , la troisième en B , & la quatrième en C ; & qu'on se propose de décrire le trapeze $fghi$ semblable au trapeze $Fghi$ & placé en telle sorte que les quatre angles f , g , h , i , égaux respectivement aux angles F , G ,

H, I , soient appliqués respectivement sur les quatre lignes ABC , AD, BD, CE .

LIVRE
PREMIER.

Fig. 70. & 71.

On commencera par tirer FH & par décrire sur FG, FH, FI les trois segmens de cercle FSG, FTH, FVI ; dont le premier FSG soit capable d'un angle égal à l'angle BAD , le second FTH d'un angle égal à l'angle CBD , & le troisième FVI d'un angle égal à l'angle ACE , en observant pour la position de ces segmens sur les lignes FG, FH, FI , que l'ordre des lettres $FSGF$ soit le même que celui des lettres $BADB$, que l'ordre des lettres $FTHF$ soit celui des lettres $CDBC$, & que l'ordre des lettres $FVIF$ soit celui des $ACEA$.

Ayant ensuite achevé les cercles de ces segmens, & tiré la ligne indéfinie PQ , qui joint les centres P & Q des deux premiers cercles FSG, FTH , on prendra sur cette ligne la droite QR qui soit à PQ , comme BC à AB , en observant pour la position de cette ligne QR , que l'ordre des lettres P, Q, R soit le même que celui des lettres A, B, C ; cela fait, du centre R & de l'intervalle RF , on décrira un quatrième cercle FNc qui coupera le troisième FVI en c , & l'on tirera Fc qui coupera le premier cercle en a , & le second en b . Menant alors les droites aG, bH, cI , on n'aura plus qu'à construire la figure $ABCfghi$ semblable à la figure $abcFGHI$, & le trapéze $fghi$ sera celui qu'il falloit construire.

Car supposant que les deux premiers cercles FSG, FTH se coupent en K , soient tirées PK, QK, RK, aK, bK, cK , & soit prolongée QP en L , les angles à la circonférence FaK, FbK, FcK étant moitié des angles FPK, FQK, FRK au centre, seront égaux aux angles LPK, LQK, LRK . Donc la figure $PQRK$ est équiangle, & semblable à la figure $abcK$, ce qui donne $ab:bc::PQ:QR$, c'est-à-dire, $::AB:BC$. De plus, les angles fAg, fBh, fCi , sont égaux, par construction, aux angles FaG, FbH, FcI . Donc la figure $ABCfghi$ est semblable à la figure $abcFGHI$. Donc le trapéze $fghi$ sera semblable au

trapeze $FGHI$, & aura ses angles f, g, h, i respectivement appuyées sur les droites ABC, AD, BD, CE . $C. Q. F. F.$

Cor. On peut mener par ce moyen une ligne droite, dont les parties soient placées suivant un ordre donné entre quatre droites données de position, & qui aient entr'elles une proportion donnée. Car augmentant les angles FGH, GHI jusqu'à ce que les droites FG, GH, HI deviennent le prolongement l'une de l'autre, la construction précédente donnera la droite $fghi$, dont les parties fg, gh, hi , placées entre les quatre droites données de position AB & AD, AD & BD, BD , & CE , feront entr'elles comme les lignes, FG, GH, HI , & garderont le même ordre entr'elles. La même question peut se résoudre un peu plus vite de la manière suivante.

Soient prolongées les droites AB & BD en K & en L , en sorte que $BK : AB :: HI : GH$; & $DL : BD :: GI : FG$; soit tiré ensuite KL , qui rencontre la droite CE en i , & soit prolongé iL en M , en sorte que $LM : iL :: GH : HI$. Cela fait, tirant la ligne MQ parallèle à LB , & qui rencontre la droite AD en g , la ligne tirée de g à i rencontrera les lignes AB, BD en f & en h , & fera la ligne demandée.

Car en tirant AP parallèle à BD & qui rencontre iL en P , on aura gM à Lh (gi à hi, Mi à Li, GI à HI, AK à BK ,) & AP à BL dans la même raison. Coupant alors DL en R en sorte que DL soit à RL dans cette même raison, & marquant les points Q & S , où la droite Mg coupe les droites AB & AD , on aura, à cause des proportionnelles gS à gM, AS à AP , & DS à DL , les proportions $gS : Lh :: AS : BL :: DS : RL$; & $BL - RL : Lh - BL :: AS - DS : gS - AS$, c'est-à-dire, $BR : Bh :: AD : Ag$, & par conséquent $BD : gQ$, & réciproquement $BR : BD :: Bh : gQ$, ou $fh : fg$. Mais par la construction, la ligne BL a été coupée en D & en R dans la même raison que la ligne FI en G & en H : Donc $BR : BD :: FH : FG$. donc $fh : fg :: FH : FG$. Or, comme on a aussi $gi : hi :: Mi : Li$, c'est-à-dire ::

$GI:HI$, il est clair que la ligne fi est coupée en g & h de la même manière que FI l'est en G & H . C. Q. F. F.

LIVRE
PREMIER.

Dans la construction de ce Corollaire, après qu'on a mené LK qui coupe CE en i , si on prolonge iE en V , en sorte qu'on ait $EV:Ei::FH:HI$, & qu'on tire Vf parallèle à BD , on aura également la solution du Problème. On l'auroit encore de même, si du centre i , & de l'intervalle IH on décriroit un cercle qui coupât BD en X , & qu'on prolongeât iX en Y , en sorte que $iY=IF$, & qu'on tirât ensuite Yf parallèle à BD . Fig. 72. & 73.

Wren & *Wallis* ont donné autrefois d'autres solutions de ce Problème.

PROPOSITION XXIX. PROBLÈME XXI.

Décrire une trajectoire donnée d'espece, qui soit coupée par quatre droites données de position, en des parties données d'espece, d'ordre & de proportion.

Qu'on se propose de décrire une trajectoire semblable à la courbe $FGHI$, & dont les parties semblables & proportionnelles aux parties FG, GH, HI de cette courbe soient placées entre les droites AB & AD, AD & BD, BD & CE données de position, la première entre les deux premières; la seconde entre les deux secondes, & la troisième entre les deux troisièmes. Ayant tiré les droites FG, GH, HI, FI , soit décrit par le Lemme 27. le trapeze $fg hi$, semblable au trapeze $FGHI$, & dont les angles f, g, h, i soient appliqués suivant l'ordre prescrit sur les droites AB, AD, BD, CE . Cela fait, on n'aura plus qu'à décrire autour de ce trapeze une trajectoire semblable à la courbe $FGHI$, & le Problème sera résolu. Fig. 74. & 75.

S C H O L I E.

Ce Problème peut encore se construire en cette sorte. Ayant tiré FG, GH, HI, FI , prolongez GF en V , tirez FH & IG & faites les angles CAK, DAL égaux aux angles FGH, VFH . Supposant ensuite que les lignes AK, AL rencontrent la ligne Fig. 76. & 77.

BD en K & en L , tirez KM & LN , dont la première KM fasse l'angle AKM égal à l'angle GHI , & soit à AK , comme HI à GH ; & la seconde LN fasse l'angle ALN égal à l'angle FHI , & soit à AL comme HI à FH . Mais en plaçant ces lignes AK, KM, AL, LN ayez cette attention que leur situation soit telle à l'égard des lignes AD, AK, AL , que l'ordre des lettres $CAKMC, ALKA, DALND$ soit le même que celui des lettres $FGHIF$.

Fig. 76. & 77. Cela fait, tirez la ligne MN qui rencontre CE en i ; faites l'angle iEP égal à l'angle IGF , & prenez PE à Ei comme FG à GI . Tirez de plus par le point P la ligne PQF , qui fasse avec la ligne ADE , l'angle PQE égal à l'angle FIG ; & observez, pour la position de ces lignes PE & PQ par rapport aux droites CE, PE , que l'ordre des lettres $PEiP, PEQP$ soit le même que celui des lettres $FGHIF$. Marquant alors le point f où PQ rencontre la ligne droite AB , on n'aura qu'à décrire sur if , comme base, la figure $ifgh$ semblable à $IFGH$, & en lui circonscrivant la trajectoire donnée d'espece, le Problème sera résolu.

Après avoir appris à trouver les orbes, il reste à déterminer les mouvemens des corps dans ces orbes.

SIXIÈME SECTION.

De la détermination des mouvemens dans des Orbes donnés.

PROPOSITION XXX. PROBLÈME XXII.

Trouver pour un temps donné le lieu d'un corps qui se meut dans une Trajectoire Parabolique donnée.

Fig. 78. Soient S le foyer de la parabole, A son sommet, P le lieu cherché où le corps est arrivé en venant de A , ou bien celui

d'où il faut qu'il parte pour arriver en A dans le temps donné. Soit de plus $4AS \times M$ la surface de l'aire parabolique donnée par ce temps.

Ayant divisé la ligne AS en deux parties égales au point G & élevé perpendiculairement à AS la droite GH égale à $3M$, on aura le lieu cherché P par l'intersection de la parabole & du cercle dont le centre est H , & le rayon HS . Car abaissant PO perpendiculaire sur l'axe, & tirant PH , on aura $AG^2 + GH^2 = (HP^2 = AO - AG^2 + PO - GH^2) = AO^2 + PO^2 - 2GA \times AO - 2GH \times PO + AG^2 + GH^2$. D'où l'on tire $2GH \times PO (= AO^2 + PO^2 - 2GA \times AO) = AO^2 + \frac{1}{4}PO^2$. Ecrivant ensuite $AO \times \frac{PO^2}{4AS}$ au lieu de AO^2 , divisant tous les termes par $3PO$ & les multipliant par $2AS$, on aura $\frac{4}{3}GH \times AS (= \frac{1}{6}AO \times PO + \frac{1}{2}AS \times PO = \frac{AO + 3AS}{6} \times PO = \frac{4AO - 3SO}{6} \times PO =$ l'aire $APSO - SPO) =$ l'aire APS . Mais à cause que $GH = 3M$, on a $\frac{4}{3}GH \times AS = 4AS \times M$. Donc l'aire APS a pour surface la quantité donnée $4AS \times M$.

Cor. 1. De-là on tire que GH est à AS , comme le temps pendant lequel le corps décrit l'arc AP est au temps pendant lequel il décrit l'arc compris entre le sommet A & la perpendiculaire élevée du foyer S sur l'axe.

Cor. 2. Si on imagine que le cercle ASP suive continuellement le corps P , la vitesse du point H sera à la vitesse du corps au sommet A , comme 3 à 8 . Donc la ligne GH , & la ligne droite que le corps peut décrire dans le temps qu'il se meut de A vers P , avec la vitesse qu'il avoit au sommet A , sont entr'elles dans la même raison.

Cor. 3. Et réciproquement; on peut trouver le temps que le corps a employé à décrire un arc quelconque AP , en tirant AP & en élevant au milieu de cette ligne une perpendiculaire qui rencontre la droite GH en H .

LIVRE
PREMIER.

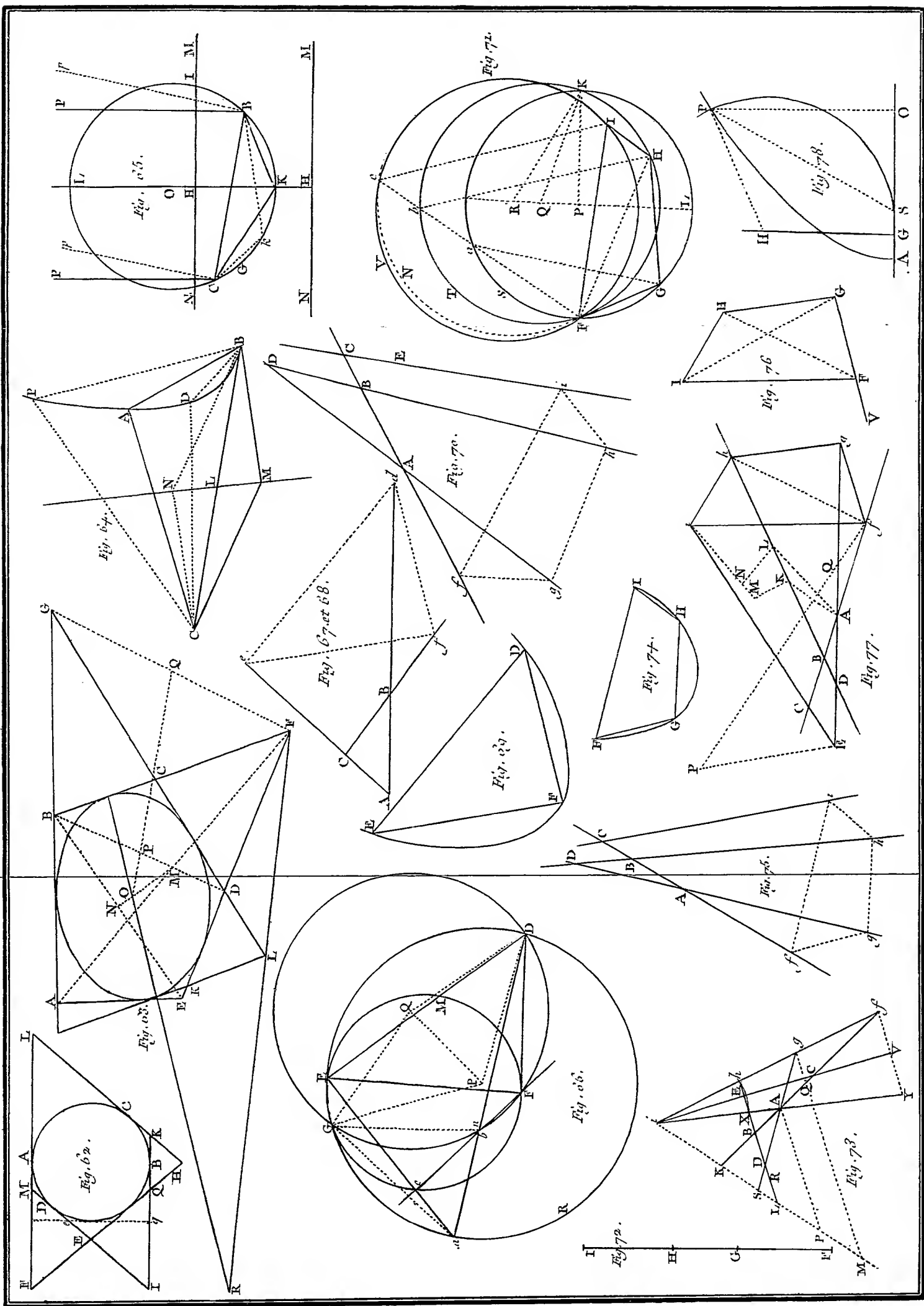
Fig. 78.

L E M M E X X V I I I.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Les parties quelconques de toute figure ovale, déterminées par les coordonnées ou par d'autres droites tirées à volonté, ne peuvent jamais être trouvées par aucune équation d'un nombre fini de termes & de dimensions.

Soit donné dans l'ovale un point quelconque autour duquel, comme pole, tourne perpétuellement une ligne droite d'un mouvement uniforme, & soit imaginé en même temps sur cette ligne un point mobile allant toujours depuis le pole avec une vitesse qui soit comme le carré de la partie de cette ligne renfermée dans l'ovale, ce point décrira alors une spirale composée d'une infinité de Spires. Or si la portion d'aire ovale, coupée par cette droite, peut être trouvée par une équation d'un nombre fini de termes, on aura aussi, par la même équation, le rayon de la spirale qui est proportionnel à cette aire. Ainsi on pourra trouver par une équation finie tous les points d'une spirale, & par conséquent on pourra trouver aussi l'intersection d'une droite quelconque donnée de position, & d'une spirale par une équation finie ; mais toute droite prolongée infiniment coupe une spirale en une infinité de points, & toute équation qui donne l'intersection quelconque de deux lignes doit donner toutes leurs intersections par autant de racines, & doit avoir par conséquent autant de dimensions qu'il y a d'intersections. Car on sçait que deux cercles se coupant en deux points, on ne peut avoir une de leurs intersections que par une équation du second degré qui donne en même temps l'autre point : & que deux sections coniques pouvant se couper en quatre points, on ne sçauroit avoir une de ces intersections que par une équation du quatrième degré, qui donne en même temps les trois autres, puisque si on cherche chacune des intersections à part, le calcul fondé sur les mêmes conditions fera le même, & donnera toujours un même résultat qui renfermera toutes les intersections, & les donnera



indifféremment. De même, les sections coniques & les courbes du troisième degré pouvant se couper en six points, leurs intersections se trouvent toutes à la fois par des équations de six dimensions, & les intersections de deux courbes du troisième degré pouvant être au nombre de neuf, elles se trouvent toutes en même temps par des équations de neuf dimensions. Si cela n'arrivoit pas nécessairement, on pourroit réduire tous les Problèmes solides aux Problèmes plans, & les surfolides aux Problèmes solides. Je parle ici des courbes dont le degré est irréductible. Car si l'équation qui exprime une courbe, peut être réduite à un degré inférieur, la courbe ne sera pas unique, mais elle sera composée de deux ou plusieurs courbes dont on peut trouver les intersections séparément par différents calculs. Les deux intersections des droites & des coniques se trouvent aussi toujours par des équations de deux dimensions, les trois intersections des droites & des courbes irréductibles du troisième degré, par des équations de trois dimensions, & les quatre intersections des droites & des courbes irréductibles du quatrième degré, par des équations de quatre dimensions, & ainsi à l'infini.

Or, la spirale étant une courbe simple & qu'on ne peut décomposer en plusieurs courbes, le nombre infini de ses intersections avec une ligne droite ne sera exprimé que par une équation d'un nombre infini de dimensions & de racines, qui donnera toutes ces intersections à la fois, puisque c'est la même loi & le même calcul pour toutes. Car si du pôle on abaisse une perpendiculaire sur la droite coupante, & que cette perpendiculaire se meuve avec la droite coupante autour du pôle, les intersections de la spirale passeront mutuellement entr'elles, celle qui étoit la première ou la plus proche, sera après une révolution la seconde, après deux révolutions elle sera la troisième, & ainsi de suite; & cependant l'équation ne changera point, à moins que la grandeur des quantités qui déterminent la position de la coupante ne change: or, comme ces quantités après chaque

révolution retournent à leurs premières grandeurs, l'équation reviendra à sa première forme ; ainsi une seule & même équation donnera toutes les intersections, & elle aura par conséquent un nombre infini de racines qui les donneront toutes. On ne peut donc trouver d'une manière générale une intersection quelconque d'une droite & d'une spirale par une équation finie, & par conséquent il n'y a point d'ovale dont l'aire coupée par des droites à volonté puisse être exprimée par une telle équation.

En prenant le rayon de la spirale proportionnel au périmètre de l'ovale coupée, il sera aisé de prouver par le même raisonnement qu'on ne peut exprimer la longueur de ce périmètre d'une façon générale par aucune équation finie. Au reste, je parle ici des ovales qui ne sont pas touchées par des figures conjuguées qui s'étendent à l'infini.

Cor. De-là on voit que l'aire elliptique décrite autour du foyer ne peut pas être exprimée dans un temps donné par une équation finie, & que par conséquent elle ne peut être déterminée par la description des courbes géométriquement rationnelles. J'appelle courbes géométriquement rationnelles, celles dont la relation entre les abscisses & les ordonnées peut être déterminée par des équations en termes finis. Les autres courbes, telles que les spirales, les quadratiques, les trochoïdes, &c. je les nomme des courbes géométriquement irrationnelles. Je vais montrer à couper l'aire elliptique proportionnellement au temps par une courbe de cette espèce.

PROPOSITION XXXI. PROBLÈME XXIII.

Trouver pour un temps donné le lieu d'un corps qui se meut dans une trajectoire elliptique donnée.

Fig. 79.

Que A soit le sommet de l'ellipse APB , S son foyer, O son centre, & qu'il s'agisse de trouver le lieu P du corps. Prolongez OA en G , en sorte que $OG : OA :: OA : OS$; élevez la perpendiculaire GH , & du centre O & de l'intervalle OG décrivez

le cercle GEF ; cela fait, prenant GEF pour cercle roulant, A pour point décrivant, & GH pour base, tracez la trochoïde ALI , & prenez GK qui soit à la circonférence $GEFG$ dans la même raison que le temps pendant lequel le corps décrit l'arc AP , en partant du point A , est au temps d'une révolution dans l'ellipse. Elevez ensuite la perpendiculaire KL qui rencontre la trochoïde en L , & vous aurez, en menant LP parallèle à KG , le lieu cherché P .

Pour le démontrer, soit décrit sur le diamètre AB le demi cercle AQB , & soient tirées du point Q , où la droite PL rencontre ce demi cercle, les droites QS , QO aux points O & S ; soit de plus prolongé OQ jusqu'à ce qu'elle rencontre l'arc EEG en F , & abaissez sur cette droite OQ la perpendiculaire SR ; il est clair, à cause que l'aire APS est proportionnelle à l'aire AQS , c'est-à-dire à la différence entre le secteur OQA & le triangle OQS , ou à la différence des rectangles $\frac{1}{2} OQ \times AQ$, & $\frac{1}{2} OQ \times SR$, ou (ce qui revient au même $\frac{1}{2} OQ$ étant donné) à la différence entre l'arc AQ & la droite SR , ou bien encore (à cause que les raisons de SR au sinus de l'arc AQ , de OS à OA , de OA à OG , de AQ à GF , & par conséquent de $AQ - SR$ à GF — le sinus de l'arc AQ , sont égales & données) à la droite GK différence entre GF & le sinus de l'arc AQ . C. Q. F. D.

S. C H O L I E.

Au reste, comme la description de cette courbe est difficile, il vaut mieux employer une solution approchée. On commencera par trouver un angle B qui soit à l'angle de $57. 29578$ degrés que soutend un arc égal au rayon, comme la distance SH des foyers est au diamètre AB de l'ellipse; & une longueur quelconque L qui soit au rayon dans la même raison inverse; ce qui étant trouvé, le Problème se construira ensuite par l'analyse suivante.

Ayant trouvé par une méthode ou par une estime quelconque,

LIVRE
PREMIER.

Fig. 76.

Fig. 80.

Fig. 82.

un lieu P voisin du vrai lieu cherché p , & ayant tiré l'ordonnée PR à l'axe de l'ellipse, la proportion des diamètres de l'ellipse donnera l'ordonnée RQ du cercle circonscrit AQB , laquelle est le sinus de l'angle AOQ pour le rayon AO , & coupe l'ellipse au point P . Il suffit de trouver cet angle en nombres approchés par un calcul grossier. Il faut connoître aussi l'angle proportionnel au temps, c'est-à-dire, l'angle qui est à quatre droits, comme le temps pendant lequel le corps décrit l'arc Ap est au temps d'une révolution dans l'ellipse. N étant cet angle, on prendra l'angle D à l'angle B , comme le sinus de l'angle AOQ est au rayon, & l'angle E à l'angle $N - AOQ + D$, comme la longueur L est à cette même longueur L diminuée du cosinus de l'angle AOQ , lorsque cet angle est moindre qu'un droit, & augmentée de ce même cosinus lorsqu'il est plus grand. On prendra ensuite l'angle F à l'angle B , comme le sinus de l'angle $AOQ + E$ au rayon, & l'angle G à l'angle $N - AOQ - E + F$, comme la longueur L est à cette même longueur L , diminuée du cosinus de l'angle $AOQ + E$ lorsque cet angle est moindre qu'un droit, & augmentée de ce même cosinus lorsqu'il est plus grand. On continuera de même à prendre l'angle H à l'angle B , comme le sinus de l'angle $AOQ + E + G$ au rayon; & l'angle I à l'angle $N - AOQ - E - G + H$, comme la longueur L est à cette même longueur L diminuée du cosinus de l'angle $AOQ + E + G$ lorsque cet angle est moindre qu'un droit, & augmentée de ce même cosinus lorsqu'il est plus grand, & l'opération pourra être continuée à l'infini. Enfin prenant l'angle AOq égal à l'angle $AOQ + E + G + I +$, &c. le cosinus Or de cet angle, & l'ordonnée Pr qui est au sinus qr comme le petit axe de l'ellipse est au grand, donneront le lieu corrigé p .

Fig. 76.

Lorsque l'angle $N - AOQ + D$ est négatif, le signe $+$ de E doit par tout se changer en $-$ & son signe $-$ en $+$. Il en est de même des signes de G & de I , lorsque les angles $N - AOQ - E + F$, & $N - AOQ - E - G + H$ deviennent négatifs.

Il est à remarquer que la suite infinie $AOQ + E + G + I + \&c.$ converge si vite, qu'il n'est presque jamais besoin d'aller au-delà du second terme E ; le calcul que je viens de donner est fondé sur ce Théorème, que l'aire APS est comme la différence entre l'arc AQ & la droite tirée du foyer S perpendiculairement sur le rayon OQ .

On résout le même Problème pour l'hyperbole par un calcul à peu près semblable. O étant son centre, A son sommet, S son foyer, & OK son asymptote : on commencera par connoître la quantité de l'aire à retrancher proportionnelle au temps, & par tirer la droite SP qu'on estime pouvoir retrancher l'aire APS approchante de l'aire demandée. On tirera ensuite OP , & des points A & P on mènera les parallèles AI , PK à l'autre asymptote. Cela fait, par la table des Logarithmes, on aura l'aire $AIKP$, ainsi que l'aire OPA qui lui est égale, laquelle étant retranchée du triangle OPS laissera l'aire APS . Divisant par la ligne SN , tirée perpendiculairement du foyer S sur la tangente TP , la double différence $2APS - 2A$ ou $2A - 2APS$ de l'aire A à retrancher & de l'aire APS retranchée, on aura la longueur de la corde PQ . Plaçant ensuite cette corde PQ entre A & P si l'aire retranchée APS est plus grande que l'aire A qu'il faut retrancher, ou du côté opposé si elle est plus petite, le point Q sera un lieu plus approché du vrai, & en répétant la même opération on en approchera de plus en plus à l'infini.

Fig. 81.

Ainsi par ces calculs on résout le Problème analytiquement & généralement; mais la méthode particulière qui suit est plus propre aux usages astronomiques.

AO , OB , OD étant les demi axes de l'ellipse, L son paramètre & D la différence entre la moitié OD du petit axe, & la moitié $\frac{1}{2}L$ du paramètre; cherchez l'angle Y , dont le sinus soit au rayon, comme le rectangle, sous cette différence D & la moitié $AO + OD$ de la somme des axes, est au carré du grand axe AB ; cherchez aussi l'angle Z dont le sinus soit au

Fig. 82.

rayon, comme le double rectangle, sous la distance SH des foyers, & cette différence D , est au triple carré de la moitié AO du grand axe. Ces angles étant une fois trouvés, vous aurez ainsi le lieu cherché.

Fig. 81. & 82. Prenez l'angle T proportionnel au temps pendant lequel l'arc BP est décrit, ou, pour parler comme les Astronomes, égal au mouvement moyen. Prenez de plus l'angle V , première équation du mouvement moyen, à l'angle Y , première plus grande équation, comme le sinus du double de l'angle T est au rayon; & l'angle X , seconde équation, à l'angle Z , seconde plus grande équation, comme le cube du sinus de l'angle T au cube du rayon. Cela fait, prenez l'angle BHP du mouvement moyen corrigé, égal, ou à la somme $T + X + V$ des angles T, V, X , si l'angle T est plus petit qu'un droit, ou à la différence $T + X - V$, si cet angle est plus grand qu'un droit, & moindre que deux droits. Enfin tirez SP au point P où HP rencontre l'ellipse, & l'aire BSP sera à très peu de chose près proportionnelle au temps.

Cette construction est assez courte, parce qu'en se contentant des deux ou trois premiers chiffres, lorsqu'on détermine les petits angles V & X , qu'on peut, si on veut, ne prendre qu'en secondes, on a une solution du Problème aussi exacte qu'il est nécessaire pour la théorie des planètes; car dans l'orbe de Mars même, dont la plus grande équation du centre est de dix degrés, l'erreur passeroit à peine une seconde.

Au reste, connoissant l'angle BHP du mouvement moyen corrigé: l'angle BSP du mouvement vrai, & la distance SP sont aisés à trouver par une méthode très connue.

Jusqu'ici j'ai examiné le mouvement des corps dans des lignes courbes; mais il se peut faire que le mobile monte ou descende dans une ligne droite. Je vais donc expliquer ce qui a rapport à cette sorte de mouvement.

SEPTIÈME SECTION.

De l'ascension & de la descension rectiligne des corps.

PROPOSITION XXXII. PROBLÈME XXIV.

Supposant que la force centripète soit réciproquement proportionnelle au carré de la distance au centre, trouver les espaces rectilignes que le corps parcourt en tombant dans des temps donnés.

Cas 1. Si le corps ne tombe pas perpendiculairement, il décrira (par le Cor. 1. de la Prop. 13.) quelque section conique dont le foyer sera dans le centre des forces. Soit $ARPB$ cette section conique, & S son foyer. Supposant d'abord que cette courbe soit une ellipse, on décrira sur son grand axe AB un demi cercle ADB , & l'on tirera par le lieu du corps tombant la ligne DPC perpendiculaire à l'axe; on tirera ensuite DS , PS , & l'on aura l'aire ASD proportionnelle au temps.

Fig. 83.

L'axe AB restant le même, & la largeur de l'ellipse diminuant continuellement, l'aire ASD demeurera toujours proportionnelle au temps; & si l'on suppose que cette largeur diminue à l'infini, l'orbe APB coïncidant avec l'axe AB , & le foyer S avec l'extrémité B de l'axe, le corps descendra dans la droite AC , & l'aire ABD sera alors proportionnelle au temps. L'espace AC que le corps décrit dans le temps donné en tombant perpendiculairement du lieu A sera donc donné aussi-tôt que l'on prendra l'aire ABD proportionnelle au temps, & qu'on tirera du point D la ligne DC perpendiculaire sur la droite AB . *C. Q. F. T.*

Cas 2. Supposant présentement que la figure RPB soit une hyperbole, soit décrit sur son diamètre principal AB une hyperbole équilatère BED : l'aire $SDEB$ sera proportionnelle au temps pendant lequel le corps P décrira l'arc PfB , parce que l'aire $SPfB$ est proportionnelle à ce temps; & que les aires

Fig. 84.

$CSP, CBfP, SPfB$ sont aux aires $CSD, CBED, SDEB$, respectivement, dans la raison donnée de CP à CD .

Si on diminue ensuite à l'infini le paramètre de l'hyperbole RPB , son premier axe restant le même, l'arc PB coïncidera avec la droite CB , le foyer S avec le sommet B , & la droite SD avec la droite BD ; ainsi l'aire $BDEB$ sera proportionnelle au temps de la chute rectiligne CB .

Fig. 85.

Cas 3. Par le même raisonnement, si la figure RPB est une parabole, & que du même sommet principal B on décrive une autre parabole BED , qui demeurera toujours donnée pendant que la première parabole, dans le périmètre de laquelle le corps P se meut, vient à coïncider avec la ligne CB , par la diminution infinie de son paramètre, le segment parabolique $BDEB$ sera proportionnel au temps de la chute rectiligne CB . C. Q. F. T.

PROPOSITION XXXIII. THÉORÈME IX.

Fig. 36. & 87.

Les choses trouvées ci-devant étant posées, la vitesse du corps qui tombe est, dans un lieu quelconque C, à la vitesse du corps qui décrit un cercle au tour du centre B, à la distance BC, dans la raison sous-doublée de AC, (distance du corps au sommet ultérieur A du cercle ou de l'hyperbole équilatère,) au demi diamètre principal $\frac{1}{2} AB$ de la figure.

Soient O le milieu du diamètre AB de l'une & de l'autre figure RPB, DEB ; PT la tangente de la figure RPB en P ; T la rencontre de cette tangente avec le diamètre commun AB prolongé, s'il est nécessaire; SY la perpendiculaire à cette tangente; BQ la perpendiculaire à AB ; L le paramètre de la figure RPB . Il est certain, par le Corol. 7. de la Propos. 16. que la vitesse du corps, qui se meut dans la ligne RPB autour du centre S , est dans un lieu quelconque P , à la vitesse du corps qui décrit un cercle autour du même centre & à la distance SP , en raison sousdoublée du rectangle $\frac{1}{2} L \times SP$ à SY^2 . Or par les coniques $AC \times CB : CP^2 :: 2AO : L$; donc

$\frac{AO \times 2CP^2}{AC \times CB} = L$. Donc ces vitesses sont entr'elles en raison sous-

doublée de $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{AC \times CB}$ à SY^2 . De plus, on a encore

par les coniques $CO : BO :: BO : TO$, & par conséquent $:: CB : BT$; d'où on tire $BO \mp CO : BO :: CT : BT$, c'est-à-

dire, $AC : AO :: CP : BQ$; & par conséquent $\frac{CP^2 \times AO \times SP}{AC \times CB} =$

$\frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$. Supposant présentement que la largeur CP

de la figure RPB diminue à l'infini, enforte que le point P coïncide avec le point C , le point S avec le point B , la ligne SP avec la ligne BC , & la ligne SY avec la ligne BQ , la vitesse du corps qui descend dans la droite CB , fera à la vitesse du corps qui décrit un cercle autour du centre B & à la distance CB dans la raison fousdoublée de $\frac{BQ^2 \times AC \times SP}{AO \times BC}$ à SY^2 ,

c'est-à-dire, (à cause qu'en ce cas $SP = BC$ & $BQ^2 = SY^2$), que ces vitesses seront alors entr'elles dans la raison fousdoublée de AC à AO ou $\frac{1}{2}AB$. C. Q. F. D.

Cor. 1. Les points B & S coïncidant, on aura $TC : TS :: AC : AO$.

Cor. 2. Si la vitesse d'un corps qui décrit un cercle autour du centre des forces étoit imprimée à ce corps suivant le rayon, & dans la direction opposée au centre, il parcoureroit en remontant un espace égal au diamètre.

PROPOSITION XXXIV. THÉORÈME X.

Si la figure BED est une parabole, la vitesse du corps qui tombe est égale dans un lieu quelconque C, à la vitesse avec laquelle ce corps peut décrire uniformément un cercle autour du centre B & à la moitié de sa distance BC.

La vitesse du corps qui décrit la parabole RPB autour du centre S , est dans un lieu P , par le Corol. 7. de la Prop. 16,

LIVRE
PREMIER.

Fig. 86. & 87.

Fig. 88.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. 88. égale à la vitesse du corps qui décrit uniformément un cercle autour du même centre S & à la distance $\frac{1}{2} SP$. Supposant donc que la largeur CP de la parabole diminue à l'infini, en sorte que l'arc parabolique PfB coïncide avec la droite CB , la proposition sera prouvée, puisque le centre S se confondra avec le sommet B , & la distance SP avec la distance BC . C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXV. THÉORÈME XI.

Fig. 89. & 90. Les mêmes choses étant posées, l'aire de la figure DES décrite autour du centre S est égale à l'aire qu'un corps peut décrire, en tournant uniformément pendant le même temps dans un cercle dont le centre est le même point S , & le rayon la moitié du paramètre de la figure DES .

Supposant que le corps ait parcouru la petite ligne Cc en tombant pendant un très-petit espace de temps, & que dans le même temps un autre corps K , en tournant uniformément dans le cercle OKk , ait décrit l'arc Kk autour du centre S ; on élèvera les perpendiculaires CD, cd qui rencontrent la figure DES en D & en d , on tirera SD, Sd, SK, Sk , l'on mènera Dd qui rencontre l'axe AS en T , & l'on abaissera la perpendiculaire SY sur cette ligne.

Cas 1. Si la figure DES est une hyperbole équilatère, ou un cercle, & que son diamètre transversal AS soit coupé en deux parties égales au point O , SO sera la moitié du paramètre. Or comme $TC:TD::Cc:Dd$, & $TD:TS::CD:SY$, on aura $TC:TS::CD \times Cc:SY \times Dd$; mais $TC:TS::AC:AO$, par le Corol. 1. de la Prop. 33. Si on prend les dernières raisons de ces lignes lorsque les points D & d coïncident: donc $AC:AO$ ou $SK::CD \times Cc:SY \times Dd$. De plus, par la Prop. 33. la vitesse en C du corps qui descend est à la vitesse du corps qui décrit un cercle autour du centre S & à la distance SC en raison sousdoublée de AC à AO ou SK , & cette vitesse, par le Corol. 6. de la Prop. 4. est à la vitesse du corps qui décrit le

cercle OKk en raison fousdoublée de SK à SC ; ou, ce qui en est une fuite évidente, la vitesse en C est à la vitesse dans le cercle OKk , c'est-à-dire, la petite ligne Cc est à l'arc Kk dans la raison fousdoublée de AC à SC , ou dans la raison simple de AC à CD . Donc, comme il suit delà que $CD \times Cc = AC \times$ Fig. 89. & 90.
 Kk , la proportion précédente $AC : SK :: CD \times Cc : SY \times Dd$ se changera en $AC : SK :: AC \times Kk : SY \times Dd$, d'où l'on tirera $SK \times Kk = SY \times Dd$, c'est-à-dire que l'aire $KS k$ est égale à l'aire $SD d$. De même, à chaque particule de temps, il y aura deux petites portions d'aires $KS k$ & $SD d$, qui, en diminuant de grandeur, & en augmentant de nombre à l'infini, auront entr'elles à la fin la raison d'égalité; donc, par le Corol. du Lemme 4. les aires entières décrites dans le même temps seront toujours égales. C. Q. F. D.

Cas 2. Si la figure DES est une parabole, on trouvera, comme ci-dessus $CD \times Cc : SY \times Dd :: TC : TS$, c'est-à-dire :: 2 : 1; donc $\frac{1}{2} CD \times Cc = \frac{1}{2} SY \times Dd$; mais, par la Prop. 34. la vitesse du corps qui tombe est égale dans le lieu C à la vitesse avec laquelle le cercle dont le rayon est $\frac{1}{2} SC$ peut être décrit uniformément, & par le Corol. 6. de la Prop. 4. cette vitesse est à la vitesse avec laquelle le cercle dont le rayon est SK peut être décrit, dans la raison fousdoublée de SK à $\frac{1}{2} SC$; donc la petite ligne Cc est à l'arc Kk dans la même raison, ou, ce qui revient au même, dans la raison de SK à $\frac{1}{2} CD$: or, delà il suit, que $\frac{1}{2} SK \times Kk = \frac{1}{4} CD \times Cc$, & par conséquent $= \frac{1}{2} SY \times Dd$, c'est-à-dire, que l'aire $KS k$ est égale à l'aire $SD d$, comme ci-dessus. C. Q. F. D.

PROPOSITION XXXVI. PROBLÈME XXV.

Déterminer le temps de la chute d'un corps qui tombe d'un lieu donné A . Fig. 92.

Sur le diamètre AS , distance du corps au centre dans le commencement de la chute, décrivez le demi cercle ADS ,

ainsi que le demi cercle OKH , qui lui est égal, & qui est décrit autour du centre S . D'un lieu quelconque C du corps, élevez l'ordonnée CD , tirez SD , & faites le secteur OSK égal à l'aire ASD . Il est clair, par la Prop. 35. que le corps en tombant par AC , emploiera le même temps qu'il faudroit à un autre corps pour décrire l'arc OK , en tournant uniformément autour du centre S . C. Q. F. F.

Fig. 92.

PROPOSITION XXXVII. PROBLÈME XXVI.

Déterminer le temps de l'ascension ou de la descente d'un corps jeté d'un lieu donné, soit en en haut, ou en en bas.

Que le corps parte du lieu donné G , suivant la ligne GS avec une vitesse quelconque. Prenez AG à $\frac{1}{2} AS$ en raison doublée de cette vitesse à la vitesse uniforme avec laquelle le corps peut circuler dans un cercle autour du centre S , & à la distance donnée SG . Si cette raison est celle de 2 à 1, le point A fera infiniment distant, & alors ce sera une parabole qu'il faudra décrire, son sommet étant S , son axe SG , & son paramètre une ligne quelconque; ce qui est clair par la Prop. 34.

Fig. 93. 94. 95.

Si cette raison est moindre ou plus grande que celle de 2 à 1, ce sera ou un cercle, ou une hyperbole équilatère qu'il faudra décrire sur le diamètre SA , comme il est évident par la Prop. 33. Dans chacun de ces cas décrivez le cercle HkK du cercle S , & d'une intervalle égal à la moitié du paramètre. Elevez les perpendiculaires GI , CD , au lieu G , & à un autre lieu quelconque C , de l'espace parcouru en montant ou en descendant, lesquelles perpendiculaires rencontrant la section conique ou le cercle en I & en D . Tirant ensuite les lignes SI , SD , & faisant les secteurs HSK , HSk égaux aux segments $SEIS$, $SEDS$, il est clair, par la Prop. 35. que le corps G parcourra l'espace GC dans le même temps qu'il faudroit au corps K , pour décrire l'arc Kk . C. Q. F. F.

PROPOSITION XXXVIII. THÉOREME XII.

LIVRE
PREMIER.

La force centripète étant proportionnelle à la hauteur ou à la distance des lieux au centre, les temps, les vitesses & les espaces décrits par les corps tombans sont respectivement proportionnels aux arcs, aux sinus droits & aux sinus versés de ces arcs.

Supposant que le corps tombe d'un lieu quelconque A , suivant une droite AS , soit décrit du centre S des forces, & de l'intervalle AS le quart du cercle AE , & soit CD le sinus droit d'un arc quelconque AD , le corps A décrira l'espace AC en tombant pendant le temps AD , & aura en C la vitesse CD .

Fig. 96.

C'est ce qu'il est aisé de démontrer par la Prop. 10. de la même manière qu'on a démontré la Prop. 32. par la Prop. 11.

Cor. 1. De là, le temps, dans lequel un corps tombant du lieu A parvient au centre S , est égal au temps dans lequel un autre corps décrit l'arc de cercle ADE .

Cor. 2. Les temps dans lesquels les corps tombent de lieux quelconques jusqu'au centre sont donc tous égaux les uns aux autres. Car par le Corol. 3. de la Prop. 4. tous les temps périodiques des corps qui tournent sont égaux.

PROPOSITION XXXIX. PROBLÈME XXVII.

La quadrature des courbes étant supposée, & le corps montant ou descendant dans une ligne droite qui passe par le centre vers lequel il est poussé, suivant une loi quelconque, on demande la vitesse de ce corps en un point quelconque de cette droite, ainsi que le temps employé à y arriver : & réciproquement.

Que le corps E tombe d'un lieu quelconque A suivant la droite $ADEC$, & que BFG soit la courbe dont toutes les ordonnées AB, DF, EG , &c. soient proportionnelles aux forces en A, D, E vers le centre C , la vitesse en un point quelconque E fera comme la racine quarrée de l'aire $ABEG$. C. Q. F. T.

Fig. 97.

Que la courbe FLM , dont l'asymptote est ABT , soit celle

dont toutes les ordonnées EM soient réciproquement proportionnelles aux aires $ABGE$, l'aire $ABTUME$ représentera le temps pendant lequel le corps parcourra en tombant la ligne AE . C. Q. F. T.

Fig. 97.

Pour démontrer la première de ces deux assertions, soit prise sur la droite AE une très petite ligne DE donnée de longueur, & soit DLF le lieu de la ligne EMG , lorsque le corps étoit en D ; si la force centripète est supposée celle qui convient pour que la vitesse du corps descendant soit proportionnelle à la racine quarrée de l'aire $ABGE$, cette aire sera en raison doublée de la vitesse, c'est-à-dire, que si au lieu des vitesses en D & en E , on écrit V & $V+I$, l'aire $ABFD$ sera comme V^2 , & l'aire $ABGE$ comme $V^2 + 2VI + I^2$, d'où il résultera que l'aire $DFGE$ sera comme $2VI + I^2$, & par conséquent $\frac{DFGE}{DE}$

sera comme $\frac{2VI + I^2}{DE}$, c'est-à-dire, en prenant les premières raisons des quantités naissantes, que la longueur DF sera comme la quantité $\frac{2VI}{DE}$, ou comme sa moitié $\frac{I \times V}{DE}$.

Maintenant, le temps, pendant lequel le corps en tombant parcourt la petite ligne DE , est comme cette petite ligne directement, & la vitesse V inversement; de plus, la force est comme l'incrément I de la vitesse directement, & comme le temps inversement; donc si on prend les premières raisons des quantités naissantes, cette force sera comme $\frac{I \times V}{DE}$, c'est-à-dire comme la longueur DF . Donc la force proportionnelle à DF ou à EG fera descendre le corps avec une vitesse qui sera comme la racine de l'aire $ABGE$. C. Q. F. D.

La seconde assertion est facile à démontrer présentement; car puisque le temps, employé à parcourir une petite ligne DE d'une longueur quelconque donnée, est inversement comme la

vitesse, & par conséquent inversement comme la ligne droite qui seroit la racine de l'aire $ABFD$, & que DL , & par conséquent l'aire naissante $DLM E$ est comme la même droite inversement : le temps sera comme l'aire $DLM E$: & la somme de tous les temps, comme la somme de toutes ces aires, c'est-à-dire, par le Corol. du Lemme 4. que le temps total employé à parcourir la ligne AE sera comme l'aire totale $ATVME$. C. Q. F. D.

Cor. 1. Si P est le lieu duquel le corps doit tomber, afin qu'étant pressé par une force centripète donnée & uniforme, telle qu'on suppose ordinairement la gravité, il acquière au lieu D une vitesse égale à celle qu'un autre corps poussé par une force quelconque a acquise au même lieu D , on aura le lieu A , d'où cet autre corps a commencé de tomber en prenant sur la perpendiculaire DF une ligne DR , qui soit à DF comme la force uniforme est à la force variable en D , & en coupant l'aire $ABFD$ égale au rectangle $PDRQ$. Car puisque l'aire $ABFD$ est à l'aire $DFGE$ comme V^2 à $2VI$, ou comme $\frac{1}{2}V$ à I , c'est-à-dire, comme la moitié de la vitesse totale produite par la force variable est à l'incrément de cette vitesse, & que de même l'aire $PQRD$ est à l'aire $DRSE$, comme la moitié de la vitesse totale produite par la force uniforme est à l'incrément de cette vitesse; que de plus ces incréments, à cause de l'égalité des temps naissans, sont comme les forces génératrices, c'est-à-dire, comme les ordonnées DF , DR , ou, ce qui revient au même, comme les aires naissantes $DFGE$, $DRSE$; il s'en suit que les aires totales $ABFD$, $PQRD$ seront l'une à l'autre comme les moitiés des vitesses totales, & que par conséquent elles seront égales, ainsi que ces vitesses.

Cor. 2. Ainsi, si d'un lieu quelconque D , on jette un corps en en haut ou en en bas avec une vitesse donnée, & que la loi de la force centripète soit connue, on trouvera la vitesse dans un autre lieu quelconque e en élevant l'ordonnée eg , & prenant cette vitesse à la vitesse dans le lieu D , comme la racine du

LIVRE
PREMIER.

Fig. 97.

rectangle $PQRD$ augmenté de l'aire curviligne $DFge$, si le lieu e est plus bas que le lieu D , ou diminué de cette aire, s'il est plus haut, à la racine du rectangle $PQRD$.

Fig. 97.

Cor. 3. On connoîtra aussi le temps en élevant l'ordonnée em réciproquement proportionnelle à la racine quarrée de $PQRD \pm DFge$, & prenant le temps pendant lequel le corps décrit la ligne De , au temps que l'autre corps poussé par une force uniforme a employé à tomber de P en D , comme l'aire curviligne $DLme$ est au rectangle $2PD \times DL$. Car le temps pendant lequel le corps, poussé par une force uniforme, a décrit la ligne PD est au temps pendant lequel ce même corps a décrit la ligne PE en raison sousdoublée de PD à PE , c'est-à-dire, (lorsque la petite ligne DE est naissante,) en raison de PD à $PD + \frac{1}{2} DE$ ou de $2PD$ à $2PD + DE$; d'où il suit que ce temps par PD est au temps par DE , comme $2PD$ à DE , ou, ce qui revient au même, comme le rectangle $2PD \times DL$ est à l'aire $DLME$, mais le temps par DE , soit que cette droite ait été parcourue en vertu de la force constante ou de la force variable, est au temps par De , parcourue en vertu de la force variable, comme l'aire $DLME$ est à l'aire $DLme$. Donc le temps par PD est au temps par De , comme $2PD \times DL$ à l'aire $DLme$.

HUITIÈME SECTION.

De la détermination des orbes que décrivent des corps sollicités par des forces centripètes quelconques.

PROPOSITION XL. THÉORÈME XIII.

Fig. 98. *Si deux corps, dont l'un est sollicité par une force centripète quelconque, tandis que l'autre monte ou descend dans une ligne droite par la même force, ont la même vitesse à une même distance quelconque du centre, ces corps auront la même vitesse à toutes les autres distances.*

Supposant qu'un corps tombe le long de la ligne AC vers le centre C , & qu'un autre corps se meuve dans la courbe $VIKk$

en partant du lieu V . Soient décrits du centre C , & d'intervalles quelconques CD , CE différens très peu l'un de l'autre, les cercles concentriques DI , EK qui rencontrent la droite AC en D & E , & la courbe VIK en I & K . Soit de plus abaissée du point N où la droite IC rencontre KE la perpendiculaire NT sur IK . Soit enfin imaginé que les vîteses aux points D & I sont égales, comme aux distances égales CD , CI , les forces centripètes seront égales. Représentons ces forces par les petites lignes égales DE , IN ; si une de ces forces IN est décomposée, par le Corol. 1. des loix, en deux autres NT & IT , la force NT agissant selon la ligne NT perpendiculaire à la direction ITK du corps, elle ne changera rien à la vîtesse du corps dans cette direction, & fera toute employée à le retirer de la ligne droite; mais l'autre force IT agissant suivant la direction même du corps, elle sera toute employée à accélérer son mouvement, & dans un très petit temps donné elle produira une accélération qui sera proportionnelle à elle-même. Donc les accélérations que les corps reçoivent en D & en I , dans des temps égaux, (si on prend les premières raisons des lignes naissantes DE , IN , IK , IT , NT) seront comme les lignes DE , IT : & dans des temps inégaux, elles seront comme ces lignes & les temps conjointement; mais les temps dans lesquels DE & IK sont parcourues, sont, à cause de l'égalité des vîteses, comme ces lignes DE & IK , donc les accélérations des corps, suivant les lignes DE & IK , sont en raison composée de DE à IT , & de DE à IK ; c'est-à-dire, comme DE^2 à $IT \times IK$, ou, ce qui revient au même, en raison d'égalité, à cause que $IT \times IK = IN^2 = DE^2$. Si donc les accélérations des corps dans leur passage de D & I à E & K sont égales, les vîteses des corps en E & en K seront aussi égales, ainsi que dans tous les autres points suivans, pris à même distance du centre. *C. Q. F. D.*

Fig. 98.

Et par le même raisonnement, les corps qui ont des vîteses égales à égale distance du centre, sont également retardés en montant à des hauteurs égales. *C. Q. F. D.*

Fig. 98.

Cor. 1. Si un corps suspendu par un fil oscille, ou qu'il soit forcé de se mouvoir dans une ligne courbe par quelque obstacle parfaitement poli, & qu'un autre corps monte ou descende suivant une ligne droite, il est clair qu'il suffira que leurs vitesses soient égales à une même hauteur quelconque, pour être égales à toutes les autres hauteurs égales. Car le fil, ou l'obstacle parfaitement poli, fait le même effet sur le corps que la force transversale NT , donc il ne le retarde ni ne l'accélère; mais il le force seulement de s'écarter de la ligne droite.

Cor. 2. Ainsi, si la quantité P représente la plus grande distance du centre à laquelle le corps puisse monter, ou en oscillant, ou en décrivant une trajectoire, en étant jetté en en haut d'un point quelconque de la trajectoire avec la vitesse qu'il a dans ce point; que de plus, A exprime la distance du corps au centre dans un autre point quelconque de la ligne parcourue, & que la force centripète soit toujours comme une puissance quelconque de A telle que A^{n-1} , la vitesse du corps à cette hauteur quelconque A fera comme $\sqrt{P^2 A^n}$, & elle sera par conséquent donnée. La démonstration en est claire par la Prop. 39.

PROPOSITION XLI. PROBLÈME XXVIII.

La force centripète étant donnée, & la quadrature des courbes étant supposée, on demande les trajectoires des corps, & les temps de leurs mouvemens dans ces trajectoires.

Fig. 99.

C étant le centre des forces, & $VIKk$ la trajectoire cherchée dans laquelle on suppose que le corps va de V vers K , soit décrit du centre C , & d'un intervalle quelconque CV , le cercle VR , soient décrits ensuite du même centre & d'intervalles quelconques très peu différens l'un de l'autre les cercles ID , KE qui coupent la trajectoire en I & en K , & la droite CV en D & en E . Soient de plus tirés les rayons CNI , CK qui prolongés rencontrent le cercle VR en X & en Y . Cela fait, si A est le lieu d'où un autre corps auroit dû tomber pour avoir en D la même vitesse

que celui qui décrit la trajectoire a en I , & que l'on conserve la construction de la Prop. 39. il est clair que la petite ligne IK , décrite dans un très petit intervalle de temps & proportionnelle à la vitesse, sera comme la racine quarrée de l'aire $ABFD$. De plus, le triangle ICK proportionnel au temps sera donné, & par conséquent KN fera réciproquement comme la hauteur IC , c'est-à-dire, (Q représentant une quantité donnée, & A la hauteur IC) comme $\frac{Q}{A}$: appelons Z cette quantité $\frac{Q}{A}$, & supposons que la quantité Q soit telle, que l'on ait en quelque cas, $\sqrt{ABFD}:Z::IK:KN$, on aura dans tous les autres cas, $\sqrt{ABFD}:Z::IK:KN$ qui donne $ABFD:Z^2::IK^2:KN^2$, & par conséquent $ABFD-Z^2:Z^2::IN^2:KN^2$. d'où l'on tire $\sqrt{ABFD-Z^2}:Z$ ou $\frac{Q}{A}::IN:KN$, ou $A \times KN = \frac{Q \times IN}{\sqrt{ABFD-Z^2}}$. Or, puisque $YX \times XC:A \times KN:CX^2:A^2$ on aura $XY \times XC = \frac{Q \times IN \times CX^2}{A^2 \sqrt{ABFD-Z^2}}$.

Si on prend donc sur DF , les droites Db , Dc respectivement égales à $\frac{Q}{2\sqrt{ABFD-Z^2}}$, & à $\frac{Q \times CX^2}{2A^2 \sqrt{ABFD-Z^2}}$; que l'on décrive les courbes ab , ac , qui passent par tous les points b & c ; & que l'on mene Va perpendiculaire sur CA , qui coupe les aires curvilignes $VDba$, $VDca$, & qu'on tire les ordonnées Ez , Ex , il est évident, que puisque le rectangle $Db \times IN$ ou $DbzE$ est égal à la moitié du rectangle $A \times KN$ ou au triangle ICK ; & que le rectangle $Dc \times IN$ ou $DcxE$ est égal à la moitié du rectangle $YX \times XC$ ou au triangle XCY ; c'est-à-dire, puisque les particules naissantes $DbzE$, ICK des aires $VDba$, VIC sont toujours égales, & que les particules naissantes $DcxE$, XCY des aires $VDca$, $V CX$ sont aussi toujours égales, l'aire produite $VDba$ sera égale à l'aire produite

Fig. 99.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. 99.

VIC ; c'est-à-dire, proportionnelle au temps, & l'aire produite $VDca$ sera égale au secteur produit VCX .

Ayant donc le temps écoulé depuis le départ du lieu V , on aura l'aire $VDba$ qui lui est proportionnelle, & par conséquent la hauteur CD ou CI ; & ayant par ce moyen l'aire $VDca$, le secteur VCX qui lui est égal donnera l'angle $VC I$. Or, dès que l'on connoît l'angle $VC I$ & la hauteur CI , on a le lieu I dans lequel le corps se trouve à la fin de ce temps. *C. Q. F. T.*

Cor. 1. On peut trouver par-là très aisément les plus grandes & les moindres distances au centre; c'est-à-dire, les apfides des trajectoires. Car ces apfides sont aux points sur lesquels la droite IC , menée par le centre, tombe perpendiculairement dans la trajectoire VIK , ce qui arrive lorsque les droites IK , NK sont égales, & par conséquent lorsque l'aire $ABFD = Z^2$.

Cor. 2. Quant à l'angle KIN , sous lequel la trajectoire coupe en un lieu quelconque le rayon IC , il peut se trouver facilement par le moyen de la hauteur IC , en prenant son sinus au rayon comme KN est à IK , c'est-à-dire, comme Z est à la racine quarrée de l'aire $ABFD$.

Fig. 100. & 101.

Cor. 3. VRS étant une section conique quelconque, ayant C pour centre & V pour sommet, si d'un de ses points R pris à volonté on tire la tangente TR & le rayon CR , que l'on fasse l'angle PCP proportionnel au secteur PCR , & le rayon $CP = CT$, la courbe VPQ , que l'on aura par ce moyen, sera celle qu'un corps parti de V perpendiculairement à VC , & avec une vitesse convenable, décrirait dans l'hypothèse d'une pesanteur réciproquement proportionnelle au cube de la distance au centre C .

Si la section conique VRS est une hyperbole, le corps parti de V ira en descendant, & arrivera au centre. Si au contraire elle est une ellipse, le corps ira en montant jusqu'à l'infini.

Lorsqu'on aura une des trajectoires VPQ décrites dans cette hypothèse de pesanteur, on aura celle qu'on voudra des autres trajectoires en augmentant ou diminuant l'angle PCP dans une
raison

raison constante, aisée à déterminer par la vitesse connue au point V ; mais il faut pour cela que dans la trajectoire donnée, le corps descende en partant de V , s'il doit descendre dans la seconde en partant du même point, & au contraire.

Si on suppose que la force tendante en C , & toujours en raison réciproque du cube de la distance, soit centrifuge au lieu d'être centripète, quelque soit la vitesse du corps en partant de V , il s'éloignera toujours de plus en plus du centre, & l'orbite qu'il décrira se construira encore en prenant les angles PCP proportionnels aux secteurs elliptiques, & faisant $CP = CT$. Tout cela suit de la proposition précédente.

LIVRE
PREMIER.

Fig. 100. & 101.

PROPOSITION XLII. PROBLÈME XXIX.

La loi de la force centripète étant donnée, on demande le mouvement d'un corps qui part d'un lieu donné avec une vitesse donnée, & suivant une ligne droite donnée.

Tout étant supposé comme dans les trois Propositions précédentes; que le corps parte du lieu I en allant vers K suivant la petite ligne IK avec la même vitesse qu'un autre corps peut acquérir au lieu D , en tombant du lieu P par une force centripète uniforme, & que cette force uniforme soit à la force variable qui agit en I sur le premier corps comme DR est à DF ; il est clair que le rectangle $PD R Q$ étant donné, ainsi que la loi de la force centripète qui agit dans la trajectoire cherchée, la courbe $B F g$ sera donnée par la construction du Problème 27 & son Corol. 1. De plus, par l'angle donné CIK on a la proportion des quantités naissantes IK , KN ; ce qui, par la construction du Problème 28, donne la quantité Q , & par conséquent les courbes abv , acw : donc, pour un temps quelconque $Dbve$, on aura la hauteur Ce ou son égale Ck , l'aire $Dcwe$, le secteur XCy qui lui est égal, & l'angle ICK ; c'est-à-dire, qu'on aura le lieu k dans lequel le corps sera alors: *C. Q. F. T.*

Fig. 102.

Après avoir traité jusqu'ici du mouvement des corps dans des orbes immobiles, nous allons examiner leurs mouvemens dans des orbes qui tournent autour du centre des forces.

NEUVIÈME SECTION.

Du mouvement des corps dans des orbes mobiles, & du mouvement des apsides.

PROPOSITION XLIII. PROBLÈME XXX.

On demande quelle est la force qui pourroit faire décrire à un corps une trajectoire mobile autour du centre de cette force, en supposant que cette trajectoire mobile soit parcourue dans le même temps, & suivant les mêmes loix que si elle étoit immobile.

Fig. 103. Supposant que le corps P fasse sa révolution dans l'orbe VPK donné de position en avançant de V vers K , soient tirées du centre C les lignes Cp égales à CP , & qui fassent les angles VCp proportionnels aux angles VCP ; l'aire que la ligne Cp décrit fera à l'aire VCP que la ligne CP décrit en même temps, comme la vitesse de la ligne décrivante Cp à la vitesse de la ligne décrivante CP ; c'est-à-dire, comme l'angle VCp à l'angle VCP , & par conséquent en raison donnée. Cette aire fera donc proportionnelle au temps.

Par ce qui précède, il est clair que l'aire proportionnelle au temps, décrite par la ligne Cp dans un plan immobile, indique que le corps p est pressé par quelque force centripète. Il n'est donc plus question que de trouver quelle est cette loi de force centripète, & l'on aura résolu le Problème.

Pour y parvenir, il n'y a qu'à trouver la courbe des points que le corps p décrit dans l'espace absolu, & chercher par le Cor. 5. de la Proposition 6. la force centripète dans cette courbe. *C. Q. F. F.*

La différence des forces par lesquelles deux corps peuvent avoir le même mouvement, l'un dans une orbite en repos, & l'autre dans la même orbite révolante, est en raison triplée inverse de leur commune hauteur.

Que les parties up , pk de l'orbite révolante soient égales aux parties VP , PK de l'orbite en repos, l'intervalle PK étant supposé très petit. De plus, que kr abaissée perpendiculairement sur Cp soit prolongée jusqu'en m ; enforte que mr soit à kr comme l'angle VCp à l'angle VCP .

Fig. 104.

Puisque les hauteurs PC & pC , KC & kC des corps révolans sont toujours égales, il est clair que les incréments ou les décrémens des lignes PC & pC seront toujours égaux. Ainsi, si les mouvemens de chacun de ces corps dans les lieux P & p sont décomposés (par le Cor. 2. des loix) en deux mouvemens, dont les uns soient dirigés vers le centre, ou suivant les lignes PC , pC , & les autres soient transversaux aux premiers; c'est-à-dire, dirigés suivant des lignes perpendiculaires à ces lignes PC , pC ; les mouvemens vers le centre seront égaux, & le mouvement transversal du corps p sera au mouvement transversal de l'autre corps P comme le mouvement angulaire de la ligne pC au mouvement angulaire de la ligne PC ; c'est-à-dire, comme l'angle VCp à l'angle VCP . Donc, dans le même temps dans lequel le corps P parvient par ces deux mouvemens au point K , le corps p étant mû d'un mouvement égal vers le centre sera porté également de p vers C , & sera par conséquent au bout de ce temps quelque part dans la ligne mkr ; & par son mouvement transversal il sera arrivé à une distance de la ligne pC , qui sera à la distance de la ligne PC à laquelle l'autre corps P sera arrivé comme le mouvement transversal du corps p au mouvement transversal de l'autre corps P . Ainsi comme la ligne kr est égale à la distance de la ligne PC à laquelle le corps P

Fig. 104.

est arrivé, si mr est à kr comme l'angle $\mathcal{V}Cp$ à l'angle $\mathcal{V}CP$; c'est-à-dire, comme le mouvement transversal du corps p au mouvement transversal de l'autre corps P , il est clair que le corps p au bout de ce temps sera en m .

C'est-là ce qui arrivera quand les corps p & P se mouveront également dans les lignes pC & PC , & que par conséquent ils seront poussés dans ces directions par des forces égales.

Mais comme il arrive que le corps p se trouve au bout de ce temps au point n déterminé en prenant $Cn = Ck$, & en telle sorte que l'angle pCn soit à l'angle pCk comme l'angle $\mathcal{V}Cp$ à l'angle $\mathcal{V}CP$. Il faut donc qu'il soit poussé par une force plus grande que celle qui pousse le corps P , si l'angle nCp est plus grand que l'angle $K Cp$; c'est-à-dire, si l'orbite upk se meut en conséquence ou en antécédence, avec une vitesse plus grande que le double de celle avec laquelle la ligne CP se meut en conséquence; & qu'il soit poussé au contraire par une force moindre, si l'orbite se meut plus lentement en antécédence. De plus, la différence des forces des corps P & p sera comme l'intervalle mn .

Que du centre C & de l'intervalle Cn ou Ck on décrive un cercle qui coupe les lignes mr , mn prolongées en s & en t , le rectangle $mn \times mt$ sera égal au rectangle $mk \times ms$, donc $mn = \frac{mk \times ms}{mt}$.

Or comme les espaces pCk , pCn sont donnés de grandeur dans un temps donné, la première raison des lignes kr & mr , de leur différence mk , & de leur somme ms dans leur naissance sera la raison simple inverse de pC . Donc, celle du rectangle $mk \times ms$ sera la doublée de cette raison; mais mt est directement comme $\frac{1}{2}mt$; c'est-à-dire, comme la hauteur pC . Donc $\frac{mk \times ms}{mt}$, c'est-à-dire, la petite ligne naissante mn , & la différence des forces, qui lui est proportionnelle, sont réciproquement comme le cube de la hauteur pC . C. Q. F. D.

Cor. 1. Il suit de là que la différence des forces dans les lieux

P & p , ou K & k est à la force par laquelle le corps peut faire sa révolution par un mouvement circulaire de R vers K , dans le même temps dans lequel le corps P décrit dans un orbe immobile l'arc PK , comme la petite ligne naissante mn est au sinus versé de l'arc naissant RK ; c'est-à-dire, comme $\frac{mk \times ms}{mt}$

est à $\frac{rk^2}{2kC}$, ou comme $mk \times ms$ est à rk^2 ; c'est-à-dire, si on prend les quantités données F & G dans la même raison entre elles que l'angle VCP & l'angle VCp ont entre eux, comme $GG - FF$ à FF . Donc si du centre C , & d'un intervalle quelconque CP ou Cp , on décrit un secteur circulaire égal à l'aire totale VPC que le corps P décrit autour du centre en faisant sa révolution dans un orbe immobile pendant un temps quelconque: la différence des forces par lesquelles le corps P & le corps p font leurs révolutions, le premier dans un orbe immobile, & le dernier dans un orbe mobile, fera à la force centripète, par laquelle un corps pourroit décrire uniformément ce secteur autour du centre dans le même temps dans lequel l'aire VPC seroit décrite uniformément, comme $GG - FF$ à FF . Car ce secteur & l'aire pCk sont l'un à l'autre, comme les temps pendant lesquels ils sont décrits.

Cor. 2. Si l'orbe VPK est une ellipse dont le foyer soit C & l'apside la plus haute V ; que l'ellipse upk lui soit semblable & égale, en sorte qu'on ait toujours $pC = PC$, que l'angle VCp soit à l'angle VCP dans la raison donnée de G à F ; & qu'enfin, au lieu de la hauteur PC ou pC , on écrive A & $2R$ pour le paramètre de l'ellipse, la force par laquelle le corps pourra faire sa révolution dans une ellipse mobile fera comme $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$, & réciproquement. Car supposé que la force par laquelle le corps fait sa révolution dans une ellipse immobile, soit exprimée par la quantité $\frac{FF}{AA}$, la force en V fera $\frac{FF}{CV}$; mais la force, par

LIVRE
PREMIER.

Fig. 104.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

laquelle le corps peut faire sa révolution dans un cercle à la distance CV avec la même vitesse que le corps qui décrit une ellipse a au point V , est à la force par laquelle le corps révolvant dans une ellipse est pressé à son apside V comme la moitié du paramètre de l'ellipse au demi diamètre CV du cercle; donc

Fig. 104. sa valeur est $\frac{RFF}{CV^3}$. De plus, la force qui est à celle-là comme

$GG - FF$ à FF a pour valeur $\frac{RGG - RFF}{CV^3}$: &c cette force

(par le Corol. 1.) est la différence au point V des forces par lesquelles, le corps P dans une ellipse immobile VPK , & le corps p dans une ellipse mobile vpk , font leur révolution. Donc, comme on vient de voir que cette différence à une hauteur quelconque A est à ce qu'elle devient à la hauteur CV , comme $A^{\frac{1}{3}}$ à $CV^{\frac{1}{3}}$, il

s'ensuit que cette même différence à la hauteur quelconque A sera $\frac{RGG - RFF}{A^{\frac{1}{3}}}$, & par conséquent, si on ajoute à la force

$\frac{FF}{AA}$, par laquelle le corps peut faire sa révolution dans une el-

lipse immobile VPK , l'excès $\frac{RGG - RFF}{A^{\frac{1}{3}}}$, on aura la force

totale $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^{\frac{1}{3}}}$ par laquelle le corps peut faire sa ré-

volution dans une ellipse mobile vpk dans le même temps.

Fig. 104.

Cor. 3. On conclura de la même manière que si l'orbe VPK est une ellipse dont le centre soit le centre C des forces, $2R$ le paramètre principal, $2T$ le paramètre transversal ou le grand axe, la force dans cette ellipse, supposée immobile, sera à la force dans la même ellipse, supposée mobile, comme $\frac{FFA}{T^3}$ à

$\frac{FFA}{T^3} + \frac{RGG - RFF}{A^{\frac{1}{3}}}$.

Cor. 4. Et généralement, si T exprime la plus grande hauteur

CV du corps, R le rayon de la courbure de l'orbe VPK en V ,
c'est-à-dire le rayon du cercle osculateur dans ce point, $\frac{VFF}{T^2}$

Fig. 104.

ce qu'est en V la force centripète par laquelle le corps peut faire
sa révolution dans une trajectoire quelconque immobile VPK ,
& X ce qu'elle est dans un autre lieu quelconque P , A la hauteur
 CP , & que le rapport de G à F exprime toujours la raison donnée
de l'angle VCP à l'angle VCP ; la force centripète, par laquelle le
même corps pourra achever les mêmes mouvemens dans le même
temps dans la même trajectoire upk muë circulairement, sera
comme la somme des forces $X + \frac{VRGG - VRFF}{A^3}$.

Cor. 5. Le mouvement d'un corps dans une orbite quelconque
immobile étant donné, on peut augmenter ou diminuer son mou-
vement angulaire autour du centre des forces en raison donnée,
& trouver les nouveaux orbes immobiles que ce mouvement pro-
duit, & les forces des corps qui y circulent.

Cor. 6. VP étant une droite indéfinie perpendiculaire à VC , si
on mène les droites CP , & qu'on les transporte ensuite en Cp , en
faisant l'angle VCP à l'angle VCP en raison donnée, la force par
laquelle le corps peut tourner dans la courbe Vpk , qui est le lieu
de tous les points p , sera réciproquement comme le cube de la
hauteur Cp . Car le corps P , par sa seule force d'inertie, peut s'a-
vancer uniformément dans la droite VP , & en ajoutant la force
qui tend vers le centre C , laquelle est réciproquement propor-
tionnelle au cube de la hauteur CP ou Cp , le mouvement recti-
ligne de ce corps deviendra (par ce qui a été ci-devant démontré)
le mouvement curviligne Vpk .

Fig. 105.

Il est à remarquer que cette courbe Vpk est la même que
la courbe VPQ trouvée dans le Cor. 3. de la Prop. 41. où l'on a
vu en effet que la force centripète étoit en raison renversée du
cube de la distance.

PROPOSITION XLV. PROBLÈME XXXI.

On demande le mouvement des apfides dans des orbes qui approchent beaucoup des orbes circulaires.

On résout ce Problème arithmétiquement en faisant enforte que l'orbite que décrit dans un plan immobile le corps qui circule dans une ellipse mobile (comme dans le Cor. 2. ou 3. de la Proposition précédente) approche de la forme de l'orbite dont on cherche les apfides, & en cherchant les apfides de l'orbite décrite ainsi dans ce plan immobile. Or, pour parvenir à donner aux orbites la même forme, il faut faire enforte que les forces centripètes qui les font décrire, étant comparées entr'elles, soient proportionnelles à des hauteurs égales.

Fig. 104.

Soit le point V la plus haute apfide, écrivant T au lieu de la plus grande hauteur CV , A à la place d'une autre hauteur quelconque CP ou cP , & X pour la différence $CV - CP$ de ces hauteurs, la force par laquelle le corps est mû dans une ellipse révolvente (comme dans le Cor. 2.) autour de son foyer C , laquelle force étoit (dans le Cor. 2.) proportionnelle à $\frac{FF}{AA} + \frac{RGG - RFF}{A^3}$;

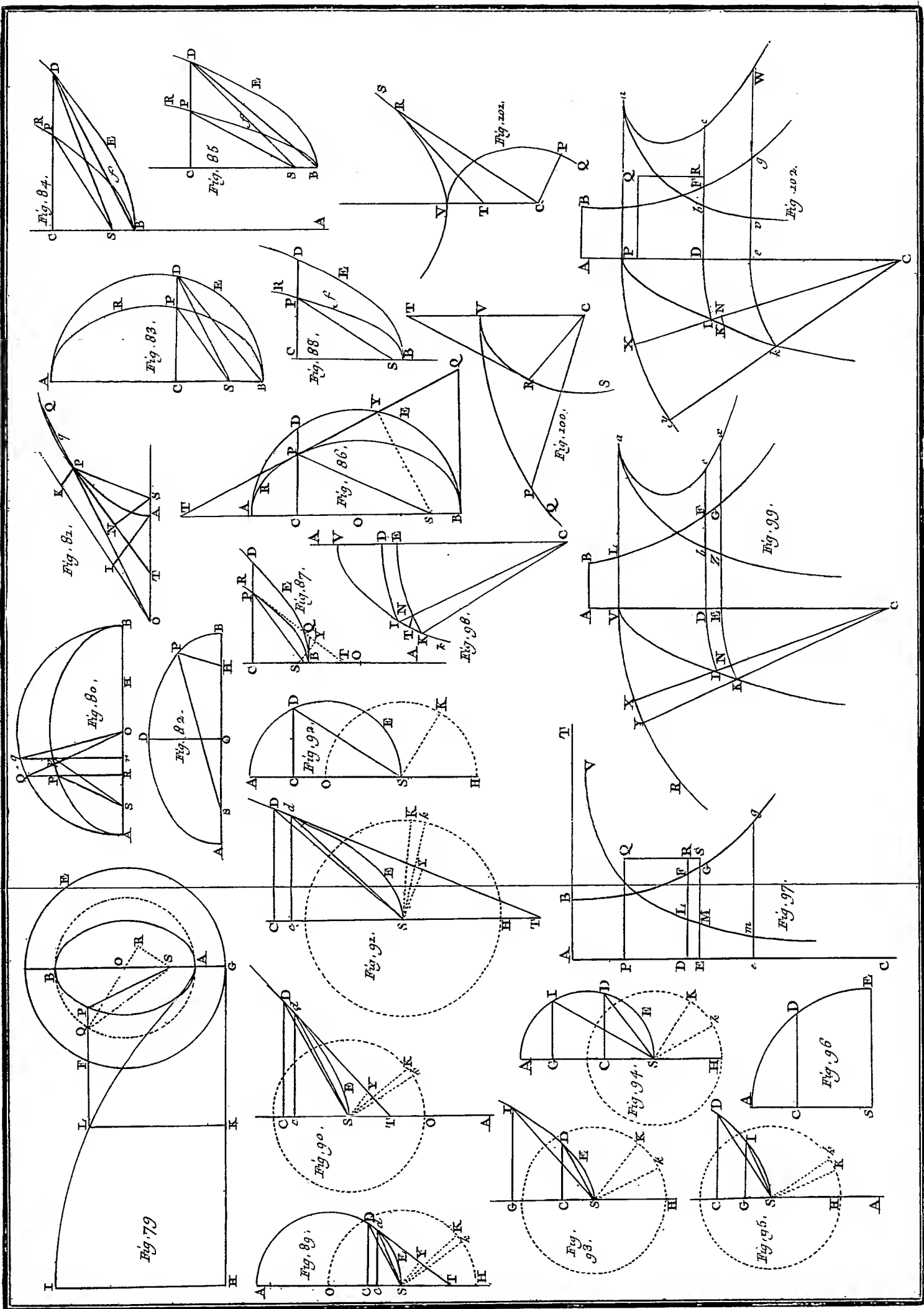
c'est-à-dire $\frac{FFA + RGG - RFF}{A^3}$ deviendra, en mettant $T - X$

au lieu de A , proportionnelle à $\frac{RGG - RFF + TFF - FFX}{A^3}$.

Il faudra réduire de même toute autre force centripète quelconque à une fraction dont le dénominateur soit A^3 , & dont les numérateurs soient déterminés par la comparaison des termes de même espèce. Ceci s'éclaircira par des exemples.

Exemple 1. Supposons que la force centripète soit uniforme, & que par conséquent elle soit proportionnelle à $\frac{A^3}{A^3}$ ou bien (en écrivant au numérateur $T - X$ au lieu de A) proportionnelle à $\frac{T^3 - 3TTX + 3TXX - X^3}{A^3}$; & en comparant les termes cor-

respondans.



répondans des numérateurs, c'est-à-dire les donnés avec les donnés, & les non donnés avec les non donnés, on aura $RG G - RFF + TFF : T^3 :: -FFX : -3TTX + 3TXX - X^3$ ou $:: -FF : -3TT + 3TX - X^2$, qui (dans le cas où l'orbe approchera tellement du cercle qu'elle se confondra avec lui, ce qui rend T égal à R & fait évanouir X) deviendra $RG G : T^3 :: -FF : -3T^2$, qui donne $GG : TT :: F^2 : 3T^2$, & réciproquement, $GG : FF :: T^2 : 3T^2$, c'est-à-dire $:: 1 : 3$; donc G fera à F , c'est-à-dire l'angle VCP à l'angle VCP , comme 1 à $\sqrt{3}$. Donc, lorsque le corps dans une ellipse immobile fera en descendant de la plus haute apside à la plus basse l'angle VCP de 180 degrés, si on peut s'exprimer ainsi, un autre corps dans une ellipse mobile, & par conséquent dans l'orbite immobile dont nous traitons ici, fera en descendant de l'apside la plus haute à la plus basse l'angle VCP de $\frac{180^\circ}{\sqrt{3}}$; ce qui est fondé sur la similitude de l'orbe que le corps décrit par une force centripète uniforme, & de celui que le corps décrit dans un plan immobile en faisant ses révolutions dans une ellipse révolvante, similitude qui n'a lieu cependant que lorsque les orbes sont supposées fort approchantes des circulaires.

Le résultat de cet exemple est donc qu'un corps, qui se meut avec une force centripète uniforme dans une orbite qui approche fort du cercle, fera toujours entre la plus haute apside & la plus basse un angle au centre de $\frac{180^\circ}{\sqrt{3}}$ ou de $103^\circ. 55' 23''$. Il fera le même angle en allant de l'apside la plus haute à la plus basse; & en retournant ensuite de la plus basse à la plus haute, & ainsi de suite à l'infini.

Exemple 2. Supposons que la force centripète soit comme une puissance quelconque de la hauteur A , telle que A^{n-3} ou $\frac{A^n}{A^3}$; $n-3$ & n représentant des exposans quelconques entiers ou rompus, rationels ou irrationels, positifs ou négatifs, le numérateur A^n ou

$T - X^n$ étant changé en une suite infinie par notre méthode des séries convergentes deviendra $T^n - nXT^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}X^2T^{n-2}$

&c. dont les termes, étant comparés avec les termes de l'autre numérateur $RGG - RFF + TFF - FFX$, donnent $RGG - RFF + TFF : T^n :: -FF : -nT^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}XT^{n-2}$ &c. qui

devient, dans la supposition que les orbés approchent infiniment d'être circulaires, $RGG : T^n :: -FF : -nT^{n-1}$, ou $G^2 : T^{n-1} :: F^2 : nT^{n-1}$ ou $G^2 : F^2 :: T^{n-1} : nT^{n-1}$, c'est-à-dire $1 : n$; ainsi G est à F , ou, ce qui revient au même, l'angle VCP est à l'angle VCP comme 1 à \sqrt{n} . C'est pourquoi l'angle VCP , que le corps fait dans l'ellipse en descendant de l'apside la plus haute à la plus basse, étant de 180° , l'angle VCP , que le corps fait en descendant de l'apside la plus haute à la plus basse dans une orbe presque circulaire décrite par une force centripète proportionnelle à la puissance A^{n-1} , fera de $\frac{180^\circ}{\sqrt{n}}$; &c par la répétition de cet angle, le corps remontera de l'apside la plus basse à la plus haute, &c ainsi de suite à l'infini.

Ainsi, si la force centripète est comme la distance au centre, c'est-à-dire, comme A ou $\frac{A^4}{A^3}$, on aura $n=4$ &c $\sqrt{n}=2$; donc, l'angle entre l'apside la plus haute & la plus basse fera de $\frac{180^\circ}{2}$ ou de 90° ; c'est-à-dire, que le corps, après avoir fait le quart d'une révolution, parviendra à l'apside la plus basse, &c qu'après en avoir fait un autre quart, il parviendra à la plus haute, &c ainsi de suite à l'infini, ce qui est évident par la Prop. 10. Car le corps étant pressé par cette loi de force centripète fera sa révolution dans une ellipse immobile dont le centre sera dans le centre des forces.

Si la force centripète est réciproquement comme la distance, c'est-à-dire directement comme $\frac{1}{A}$ ou comme $\frac{A^2}{A^3}$, on aura $n=2$, &c par conséquent l'angle entre l'apside la plus haute & la plus

basse fera de $\frac{180^\circ}{\sqrt{2}}$ ou de $127^\circ 16' . 45''$. Ainsi lorsqu'un corps fera

la révolution en vertu d'une telle force, il ira, par la répétition continuelle de ce même angle, alternativement de l'apside la plus haute à la plus basse, & de la plus basse à la plus haute à l'infini.

Si la force centripète est réciproquement comme la racine quar-
rée de la onzième puissance de la hauteur, c'est-à-dire récipro-
quement comme $A^{\frac{11}{4}}$, & par conséquent en raison directe de
 $A^{\frac{1}{4}}$ ou de $\frac{A^{\frac{1}{4}}}{A^{\frac{1}{3}}}$ on aura $n = \frac{1}{4}$ & $\frac{180^\circ}{\sqrt{n}} = 360^\circ$ & par conséquent
le corps emploiera une révolution entière à aller de l'apside la
plus haute à l'apside la plus basse : il mettra de même une seconde
révolution à aller de cette plus basse à la plus haute, & ainsi de
suite à l'infini.

Exemple 3. Prenant m & n pour les exposans quelconques des
puissances de la hauteur, & b, c pour des nombres donnés à vo-
lonté, supposons que la force centripète soit comme $\frac{b A^m + C A^n}{A^3}$;

c'est-à-dire, comme $\frac{b \times \overline{T-X}^m + C \times \overline{T-X}^n}{A^3}$, ou (par notre même

méthode des séries convergentes) comme $\frac{b T^m + c T^n - m b X T^{m-1}}{A^3}$

$- n c X T^{n-1} + \frac{m m - m}{2} b X X T^{m-2} + \frac{n n - n}{2} c X X T^{n-2}, \&c.$

& en comparant les termes des numérateurs on aura, $R G G$
 $= R F F + T F F : b T^m + c T^n :: - F^2 : - m b T^{m-1} - n c T^{n-1} +$
 $\frac{m m - m}{2} b X T^{m-2} + \frac{n n - n}{2} c X T^{n-2}, \&c.$ qui devient, dans la suppo-
sition que les orbites approchent infiniment d'être circulaires,
 $G^2 : b T^{m-1} + c T^{n-1} :: F^2 : m b T^{m-1} + n c T^{n-1}$, ou $G^2 : F^2 ::$
 $b T^{m-1} + c T^{n-1} : m b T^{m-1} + n c T^{n-1}$, on (en exprimant arith-
métiquement par l'unité la plus grande hauteur $C V$ ou T)
 $G^2 : F^2 :: b + c : m b + n c$, d'où on tire G à F ; c'est-à-dire, l'an-
gle $V C p$ à l'angle $V C P$, comme 1 à $\sqrt{\frac{m b + n c}{b + c}}$. L'angle $V C P$,

entre l'apside la plus haute & la plus basse dans une ellipse immobile, étant donc de 180° , l'angle VCp entre les mêmes apsidés dans l'orbe que le corps décrit par une force centripète proportionnelle à la quantité $\frac{bA^m + cA^n}{A^3}$ sera de $180^\circ \sqrt{\frac{b+c}{mb+nc}}$.

Par le même raisonnement, si la force centripète est comme $\frac{bA^m - cA^n}{A^3}$, on trouvera l'angle entre les apsidés de $180^\circ \sqrt{\frac{b-c}{mb-nc}}$.

& on résoudra de même le Problème dans les cas plus difficiles.

La quantité à laquelle la force centripète est proportionnelle doit toujours se changer en des séries convergentes dont le dénominateur soit A^3 , ensuite il faut prendre la partie constante du numérateur qui vient de cette opération, dans la même raison à son autre partie qui est variable, que la partie donnée $RGG - RFF + TFF$ du numérateur $RGG - RFF + TFF - FFX$ est à la partie variable $-FFX$ du même numérateur. Négligent alors dans la proportion les quantités qui peuvent l'être par la nature des orbes, & écrivant l'unité au lieu de T , on trouvera la proportion de G à F .

Cor. 1. Si la force centripète est comme quelque puissance de la hauteur, on peut trouver cette puissance par le mouvement des apsidés, & réciproquement. Supposons, par exemple, que tout le mouvement angulaire par lequel le corps retourne à la même apside soit au mouvement angulaire d'une révolution, ou de 360° comme un nombre quelconque m , à un autre nombre n , & qu'on nomme la hauteur A : la force sera comme la puissance $\frac{nn}{mm} - 3$ de la hauteur A ; ce qui est clair par le second exemple.

D'où l'on voit que cette force, en s'éloignant du centre, ne peut pas décroître dans une plus grande raison que la raison triplée de la hauteur. Un corps qui seroit poussé par une telle force, & qui commenceroit à descendre en partant de la plus haute

apside n'auroit point de plus basse apside ; mais descendroit sans cesse jusqu'au centre en décrivant la courbe dont nous avons parlé dans le Cor. 3. de la Prop. 41. & si sa direction, en quittant l'apside, tendoit à le faire monter, il monteroit à l'infini sans avoir de plus haute apside. Décrivant alors la courbe dont on a parlé dans le même Corollaire & dans le Corol. 6. de la Prop. 44. lorsque la force en s'éloignant du centre décroît dans une plus grande raison que la raison triplée de la hauteur, le corps en partant de l'apside, s'il commence à descendre ou à monter, descendra jusqu'au centre, ou montera à l'infini ; mais si la force, en s'éloignant du centre, décroît dans une raison moindre que la raison triplée de la hauteur, ou croît dans une raison quelconque de la hauteur, le corps ne descendra jamais jusqu'au centre ; mais il ira alternativement de l'apside la plus haute à la plus basse : & réciproquement, si le corps monte & descend alternativement d'une apside à l'autre sans toucher jamais le centre, la force, en s'éloignant du centre, augmentera, ou bien elle décroîtra dans une raison moindre que la raison triplée de la hauteur : & plus le corps retournera vite d'une apside à l'autre, plus la raison des forces s'éloignera de cette raison triplée ; en sorte que si le corps en 8 ou 4 ou 2 ou $1\frac{1}{2}$ révolutions, part de la plus haute apside, & y retourne par une ascension & une descension alternative ; c'est-à-dire, si $m :$

$n :: 8$ ou 4 ou 2 ou $1\frac{1}{2} : 1$, & que par conséquent $\frac{n}{m} - 3$ ait pour valeur $\frac{1}{64} - 3$ ou $\frac{1}{16} - 3$ ou $\frac{1}{4} - 3$ ou $\frac{4}{9} - 3$: la force sera comme $A^{\frac{1}{64} - 3}$ ou $A^{\frac{1}{16} - 3}$ ou $A^{\frac{1}{4} - 3}$ ou $A^{\frac{4}{9} - 3}$; c'est-à-dire, réciproquement, comme $A^3 - \frac{1}{64}$ ou $A^3 - \frac{1}{16}$ ou $A^3 - \frac{1}{4}$ ou $A^3 - \frac{4}{9}$.

Si le corps à chaque révolution retournoit à la même apside immobile, on auroit $m : n :: 1 : 1$, donc $A^{\frac{n}{m} - 3} = A^{-2}$ ou $\frac{1}{A^2}$; & par conséquent les forces décroîtroient en raison doublée de la

hauteur, comme il a été démontré précédemment. Si le corps dans les trois quarts, ou les deux tiers, ou le tiers, ou le quart d'une révolution retourne à la même apside, on aura $m : n :: \frac{3}{4}$ ou $\frac{2}{3}$ ou $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4} : 1$, donc $A^{\frac{n}{m}} = A^{\frac{16}{9}}$ ou $A^{\frac{9}{4}}$ ou $A^{\frac{16}{3}}$ ou $A^{\frac{16}{3}}$; & par conséquent la force sera réciproquement comme $A^{\frac{11}{9}}$ ou $A^{\frac{3}{4}}$, ou directement comme A^6 ou A^{11} . Enfin si le corps a fait une révolution entière, & trois degrés de plus lorsqu'il revient à la plus haute apside d'où il étoit parti, & que par conséquent cette apside fasse à chaque révolution du corps trois degrés dans le même sens que ce corps, on aura $m : n :: 363^\circ : 360^\circ$ ou $:: 121 : 120$ qui donne $A^{\frac{n}{m}} = A^{\frac{29121}{14641}}$, & par conséquent la force centripète sera réciproquement comme $A^{\frac{29121}{14641}}$, ou réciproquement comme $A^{\frac{4}{245}}$ à peu près. La force centripète décroît donc dans une raison un peu plus grande que la raison doublée, mais qui approche $59\frac{3}{4}$ fois plus près de cette raison que de la triplée.

Cor. 1 Ainsi, si le corps, par une force centripète qui soit réciproquement comme le carré de la hauteur, fait sa révolution dans une ellipse qui ait son foyer dans le centre des forces, & qu'à cette force centripète on ôte ou on ajoute une force nouvelle quelconque; on peut connoître (par l'exemple 3) le mouvement des apsides causé par cette force nouvelle : & réciproquement.

Si, par exemple, de la force $\frac{1}{A^2}$ par laquelle le corps fait sa révolution dans une ellipse, on ôte une nouvelle force exprimée par cA , la force restante sera alors comme $\frac{A - cA^4}{A^3}$, ce qui donnera (exemple 3) $b = 1$, $m = 1$, & $n = 4$; & dans cette supposition l'angle de la révolution entre les apsides sera de $180^\circ \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$.

Supposé que cette nouvelle force soit de 357.45 parties, moins

dre que la première par laquelle le corps fait sa révolution dans une ellipse; c'est-à-dire, que $c = \frac{100}{31745}$ lorsque A ou $T = 1$, la

quantité $180 \sqrt{\frac{1-c}{1-4c}}$ deviendra alors $180 \sqrt{\frac{35641}{31745}}$, ou 180.7623;

c'est-à-dire, $180^{\circ} 45' 44''$. Donc, dans cette hypothèse, le corps parviendra de l'apside la plus haute à la plus basse par un mouvement angulaire de $180^{\circ} 45' 44''$ & par la répétition de ce mouvement il continuera à aller d'une apside à l'autre, l'apside la plus haute ayant pendant chaque révolution un mouvement angulaire de $1^{\circ} 31' 28''$ en conséquence, ce qui est à peu près la moitié du mouvement de l'apside de la lune.

Nous avons traité jusqu'à présent des mouvemens des corps dans des orbites dont les plans passent par le centre des forces: nous allons à présent examiner leurs mouvemens dans des plans excentriques. Nous nous conformerons en cela aux Auteurs qui ont traité du mouvement des graves; ces auteurs ayant coutume de considérer l'ascension & la descension des poids, par des plans quelconques donnés, tant obliques que perpendiculaires. Nous supposerons que les plans sur lesquels sont les corps poussés par des forces quelconques soient parfaitement polis; & même au lieu des plans sur lesquels les corps s'appuyent, & qu'ils pressent, nous supposerons ici d'autres plans qui leur soient parallèles, & dans lesquels les centres des corps se meuvent & décrivent les orbites par leur mouvement. Nous irons plus loin, nous déterminerons par la même loi les mouvemens des corps dans les superficies courbes.



DIXIÈME SECTION.

Du mouvement des corps dans des superficies données , & des oscillations des corps suspendus par des fils.

PROPOSITION XLVI. PROBLÈME XXXII.

Une loi quelconque de forces centripètes étant donnée , on demande, en supposant la quadrature des courbes , le mouvement d'un corps qui part d'un lieu donné , avec une vitesse donnée , & suivant une droite donnée sur un plan quelconque qui ne passe pas par le centre des forces.

Fig. 106.

Soit S le centre des forces , SC la plus petite distance de ce centre au plan donné , P un corps partant du lieu P suivant une droite PZ , Q le même corps qui se meut sur le plan donné dans la trajectoire cherchée PQR . Cela posé , si on tire CQ , QS , que sur QS on prenne SV proportionnelle à la force centripète qui tire le corps vers le centre S , & qu'on mene VT parallèle à CQ & qui rencontre SC en T : la force SV se décomposera (Corol. 2. des loix) dans les forces ST , TV ; desquelles ST , tirant le corps suivant une ligne perpendiculaire au plan , ne change rien à son mouvement dans ce plan. Mais l'autre force TV agissant parallèlement au plan , tire le corps directement vers le point C donné dans le plan , & l'oblige par conséquent à se mouvoir dans ce plan de la même manière que si la force ST n'existoit pas , & que le corps tournât autour du centre C dans un espace libre par la seule force TV . Or la force centripète TV , par laquelle le corps Q tourne autour du centre donné C dans un espace libre , étant donnée , il est clair que la trajectoire PQR que le corps décrit , le lieu Q dans lequel il se trouve dans un temps quelconque donné , & la vitesse dans

dans ce lieu Q sont aussi donnés; par la Prop. 42. & réciproquement. *C. Q. F. T.*

PROPOSITION XLVII. THÉOREME XV.

La force centripète étant supposée proportionnelle à la distance au centre, tous les corps qui font leurs révolutions dans des plans quelconques décriront des ellipses, & les temps de leurs révolutions seront égaux; & les corps qui décriront des lignes droites dans cette hypothèse oscilleront alors, & employeront toujours le même temps dans ces oscillations quelles qu'elles soient.

Car, les choses restant comme dans la Prop. précédente, la force SV par laquelle le corps Q est tiré vers le centre S en faisant sa révolution dans le plan quelconque PQR , est comme la distance SQ ; & par conséquent à cause des proportionnelles SV & SQ , TV & CQ , la force TV , par laquelle le corps est tiré vers le point C donné dans le plan de l'orbe, est comme la distance CQ . Les forces qui tirent vers le point C les corps qui sont dans le plan PQR sont donc, eu égard aux distances, égales aux forces par lesquelles les corps sont tirés de toutes parts vers le centre S ; & par conséquent ces corps employeront les mêmes temps à décrire les mêmes figures, soit dans le plan quelconque PQR autour du point C , ou dans des espaces libres autour du centre S ; donc, par le Cor. 2. de la Prop. 10. & par le Cor. 2. de la Prop. 38, ils décriront des ellipses dans ce plan autour du centre C , ou bien ils acheveront leurs périodes d'allée & de retour dans des lignes droites menées dans ce plan par le centre C , & cela dans des temps qui seront toujours égaux. *C. Q. F. D.*

Fig. 106.

S C H O L I E.

La descension & l'ascension des corps dans des superficies courbes se peuvent traiter de la même manière que les mouvemens dont on vient de parler. Imaginez qu'une ligne courbe décrite

dans un plan tourne autour d'une ligne droite de ce plan, & que par ce moyen elle forme une surface courbe : si un corps vient à se mouvoir de manière que son centre soit toujours dans cette surface, & qu'en y oscillant, il se trouve toujours dans un même plan, passant par l'axe de rotation, la courbe qu'il décrit alors sera égale à celle dont la révolution a produit la surface ; & ainsi il suffira d'examiner les mouvemens qui peuvent être exécutés dans cette courbe.

PROPOSITION XLVIII. THÉORÈME XVI.

Si on fait rouler un cercle sur la convexité d'une sphere dans le plan d'un grand cercle de cette sphere, l'arc de la cycloïde ou épicycloïde, décrit pendant ce mouvement, & compris entre le point de contact du cercle roulant dans sa première position, & le point où est arrivé ce point de contact après un temps quelconque, a pour mesure une ligne qui est au double du sinus versé de la moitié de l'arc du cercle roulant dont tous les points ont été appliqués sur la circonférence du grand cercle pendant le roulement, comme la somme des diamètres de la sphere & du cercle est au demi diamètre de la sphere.

PROPOSITION XLIX. THÉORÈME XVII.

Si on fait rouler un cercle dans la concavité d'une sphere dans le plan d'un grand cercle de cette sphere, l'arc de cycloïde ou d'épicycloïde, décrit pendant ce mouvement, & compris entre le point de contact du cercle roulant dans sa première position, & le point où ce point de contact est arrivé après un temps quelconque, a pour mesure une ligne qui est au double du sinus versé de la moitié de l'arc du cercle roulant dont tous les points ont été appliqués sur la circonférence du grand cercle pendant le roulement, comme la différence des diamètres de la sphere & du cercle au demi diamètre de la sphere.

Fig. 107. & 108.

Soit ABL la sphere, C son centre, BPV le cercle roulant, E le centre de ce cercle, B le point de contact, & P le point auquel le point du contact est arrivé après l'application successive.

de tous les points de l'arc BP sur l'arc de grand cercle AP , il s'agit de prouver que l'arc de cycloïde AP , décrit pendant ce mouvement, a pour mesure une ligne qui est au double du sinus versé de l'arc $\frac{1}{2}BP$ comme $2CE$ à CB .

Du point V , où CE rencontre le cercle roulant, tirez au point P la droite VP & menez la tangente VH . Tirez ensuite de P les droites BP , PE , CP & la tangente PH . Abaissez de V sur CP la perpendiculaire VF , & du point G où cette perpendiculaire rencontre PH , ainsi que du point H concours des tangentes PH , VH , menez GI & HK perpendiculaires à VP . Enfin du centre C & d'un intervalle quelconque Co , décrivez l'arc nom , & du centre V & de l'intervalle Vo , décrivez l'arc oq qui coupe en q la ligne VP prolongée. Cela fait, il est aisé de remarquer que comme le cercle, en avançant, tourne toujours autour du point de contact B , la droite BP est perpendiculaire à la cycloïde AP , & par conséquent que la droite VP touche cette courbe au point P ; le rayon du cercle nom , étant augmenté ou diminué peu à-peu, égalera enfin la ligne CP ; & parce que la figure évanouissante $Pnomq$ & la figure $PFGVI$ sont semblables, la dernière raison des petites lignes évanouissantes Pm , Pn , Po , Pq , c'est-à-dire, la raison des changemens momentanés de la courbe AP , de la droite CP , de l'arc circulaire BP , & de la droite VP , sera la même que celle des lignes PV , PF , PG , PI respectivement. Mais comme VF est perpendiculaire sur CF , & VH sur CV , & que par conséquent les angles HVG , VCF sont égaux; que de plus l'angle VHG (à cause des angles droits V & P du quadrilatère $HVEP$) est égal à l'angle CEP , les triangles VGH , CEP seront semblables; ce qui donnera $GH:HV$ ou HP & $KI:KP :: EP:CE$; d'où l'on tire $CB:EC :: PI:PK$, & par conséquent $CB:2CE :: PI:PV$, $:: Pq:Pm$. Donc le décrement de la ligne VP , c'est-à-dire, l'incrément de la ligne $BV-VP$ est à l'incrément de la ligne courbe AP dans la raison donnée

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

de CB à $2CE$, d'où il suit, par le Cor. du Lemme 4. que les longueurs entières $BV-VP$ & AP sont dans la même raison. Maintenant il est clair qu'en prenant BV pour rayon, VP est le cosinus de l'angle BVP ou $\frac{1}{2}BEP$, & $BV-VP$ le sinus versé du même angle : donc dans le cercle dont le rayon est $\frac{1}{2}BV$, $BV-VP$ sera le double du sinus versé de l'arc $\frac{1}{2}BP$, donc AP est au double du sinus versé de l'arc $\frac{1}{2}BP$, comme $2CE$ à CB . C. Q. F. D.

Fig. 107. & 108.

Nous nommerons la ligne AP considérée dans la première Proposition, *cycloïde extérieure*, & celle qui est considérée dans la dernière, nous la nommerons *cycloïde intérieure*.

Cor. 1. Si on décrit une cycloïde entière ASL , & qu'on la coupe en deux parties égales en S , l'arc PS fera à VP (double du sinus de l'angle VBP pour le rayon EB) comme $2CE$ à CB , & par conséquent en raison donnée.

Cor. 2. Et le demi périmètre de la cycloïde AS fera égal à la ligne droite qui est au diamètre BV du cercle, comme $2CE$ à CB .

PROPOSITION L. PROBLÈME XXXIII.

Faire qu'un corps suspendu par un fil oscille dans une cycloïde donnée.

Fig. 109.

Etant donnée la cycloïde intérieure QRS coupée en deux moitiés au point R , & rencontrant par ses deux extrémités Q & S la superficie du globe QVS au dedans duquel elle a été décrite, soit tirée de R au centre C de ce globe la droite CR qui coupe en deux parties égales l'arc QS en O , & qui soit prolongée en A ; en sorte que $CA:CO::CO:CR$. Du centre C & de l'intervalle CA soit décrit ensuite un globe extérieur DAF , & par le moyen de ce globe & du cercle dont le diamètre est AO , soient tracées deux demi cycloïdes AQ , AS , lesquelles touchent le globe intérieur en Q & en S , & rencontrent le globe extérieur en A . Cela fait, si de ce point A , on suspend le corps T par un fil APT dont la longueur soit égale à AR , & que l'on fasse osciller ce corps entre les demi cycloï-

des AQ , AS ; enforte que toutes les fois que le pendule s'éloignera de la perpendiculaire AR , la partie supérieure AP de ce fil soit appliquée à la demi cycloïde APS , tandis que le reste PT de ce fil demeure étendu en ligne droite, la ligne décrite par le corps T , pendant ces oscillations, fera la cycloïde donnée QRS . C. Q. F. F.

Fig. 109.

Car tirant du centre C au point V , où le fil rencontre le cercle QOS , le rayon CV , & élevant des extrémités P & T de la partie droite PT du fil les perpendiculaires PB , TW , qui rencontrent la droite CV en B & en W , il est clair, par la construction & la formation des figures semblables AS , SR , que ces perpendiculaires PB , TW couperont sur CV les intervalles VB , VW égaux aux diamètres OA , OR des cercles roulans de ces deux cycloïdes. Donc TP est à VP (double du sinus de l'angle VBP pour le rayon $\frac{1}{2}BV$) comme BW à BV , ou comme $AO + OR$ à AO ; c'est-à-dire, (à cause que CA est proportionnelle à CO , CO à CR , & AO à OR) comme $CA + CO$ à CA , ou bien encore, en coupant BV en deux parties égales au point E , comme CE à CB . De-là il suit, par le Corol. 1. de la Prop. 49. que la partie droite PT du fil est toujours égale à l'arc PS de la cycloïde, & que tout le fil APT est égal à l'arc APS moitié de la cycloïde, c'est-à-dire (Cor. 2. de la Prop. 49.) à la longueur AR , & réciproquement, si on suppose que le fil demeure toujours égal à AR , le point T se mouvra dans la cycloïde donnée QRS . C. Q. F. D.

Cor. Le fil AR est égal à la demi-cycloïde AS , & par conséquent il a au demi-diamètre AC du globe extérieur la même raison que la demi-cycloïde SR , qui est semblable à la première AS , au demi-diamètre CO du globe intérieur.



PROPOSITION LI. THÉORÈME XVIII.

Fig. 110.

Si on suppose que le corps T, oscillant comme on vient de l'expliquer dans la cycloïde QRS, soit animé par une force centripète tendante au centre C, & agissant proportionnellement à la distance au centre, & qu'il n'éprouve l'action d'aucune autre force, les oscillations de ce corps, quelque inégales qu'elles soient, seront de même durée.

Fig. 110.

Puisque la force centripète qui pousse le corps T vers C est comme la droite CT , il est clair, par le Cor. 2. des loix du mouvement, qu'en abaissant CX perpendiculaire sur la tangente TX de la cycloïde, cette force TC se résoudra dans les deux forces CX , TX , desquelles CX agissant suivant la direction PT ne fait d'autre effet que de tendre le fil PT , & est entièrement détruite par la résistance de ce fil; mais l'autre force TX , poussant le corps transversalement, c'est-à-dire vers X , accélère directement son mouvement dans la cycloïde; & il est clair que l'accélération de ce corps, étant proportionnelle à cette force accélératrice, est à chaque moment comme la longueur TX ; c'est-à-dire, à cause que CV , WV sont données, & que TX , TW leur sont proportionnelles, comme la longueur TW , ou, ce qui revient au même, par le Cor. 1. de la Prop. 49. comme la longueur de l'arc TR de la cycloïde.

Deux pendules APT , Apt étant donc inégalement écartés de la perpendiculaire AR , & abandonnés à eux-mêmes en même temps, auront toujours des accélérations qui seront comme les arcs TR , tR à décrire. Or les parties décrites dans le commencement du mouvement sont comme les accélérations, c'est-à-dire, comme les arcs entiers, & par conséquent les parties qui restent à décrire & les accélérations suivantes qui sont proportionnelles à ces parties sont aussi comme les arcs entiers, & ainsi de suite. Donc les accélérations, & par conséquent les vitesses produites, les parties décrites par ces vitesses, & les

parties à décrire feront toujours comme les arcs entiers; mais si les parties à décrire gardent toujours entr'elles la même raison, elles s'évanouiront en même temps; c'est-à-dire, que les deux corps oscillans arriveront en même temps à la perpendiculaire AR . Et réciproquement, les ascensions des pendules perpendiculaires faites d'un mouvement rétrograde le long des mêmes arcs cycloïdaux, & à compter du lieu le plus bas R seront retardés à chacun des lieux par les mêmes forces qui accéléroient leurs descensions, enforte que les vitesses des ascensions & des descensions faites par les mêmes arcs seront égales, & que les temps de ces descensions & de ces ascensions seront aussi égaux. Or comme les deux parties RS & RQ de la cycloïde qui sont placées des deux côtés de la perpendiculaire sont semblables & égales, les deux pendules auront donc leurs oscillations entières isochrones, ainsi que leurs demi-oscillations. *C. Q. F. D.*

Cor. La force par laquelle le corps T est accéléré ou retardé dans un lieu quelconque T d'une cycloïde est à tout le poids de ce même corps dans le lieu le plus élevé S ou Q , comme l'arc TR de la cycloïde à l'arc SR ou QR de la même courbe.

PROPOSITION LII. PROBLÈME XXXIV.

Trouver les vitesses des pendules dans chaque point des arcs qu'ils décrivent, & les temps qu'ils emploient tant à parcourir ces arcs entiers que leurs parties quelconques.

D'un centre quelconque G & de l'intervalle GH égal à l'arc RS de la cycloïde, décrivez le demi cercle HKM coupé en deux parties égales par le demi diamètre GK . Imaginez ensuite que pendant que le corps T part de S pour aller vers R , un corps L parte de H pour aller vers G en éprouvant l'action d'une force proportionnelle à la distance à ce centre, & égale en H à la force que le corps T a en S vers le centre C . Fig. 111. & 112.

Comme les forces qui sollicitent ces corps sont égales dans le commencement, & qu'elles sont toujours proportionnelles aux

LIVRE
PREMIER.

Fig. 110.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. III. 112.

espaces TR & LG à décrire, elles feront par conséquent égales dans les lieux T & L en supposant $TR = LG$; ainsi il est clair que ces corps décriront les espaces égaux ST , HL dans le commencement. Donc ces corps continuant à être sollicités également dans la fuite, ils continueront aussi à décrire des espaces égaux. C'est pourquoi, par la Prop. 38. le temps dans lequel le corps décrit l'arc ST sera au temps d'une oscillation, comme l'arc HI , qui exprime le temps que le corps H emploie à arriver en L , est à la demie circonférence HKM qui représente le temps que ce corps H emploie à arriver en M . Et la raison de $\sqrt{SR^2 - TR^2}$ à SR exprimera celle de la vitesse du pendule en T à la vitesse en R , à cause que cette raison est la même que celle de la vitesse du corps H au lieu L à la vitesse au lieu G , & que ces dernières vitesses sont comme les incréments des lignes HL , HG , pendant des fluxions de temps égales, ou, ce qui revient au même, pendant les fluxions égales des arcs HI , HK .

De plus, à cause que dans des oscillations par des arcs moindres que la cycloïde entière, les arcs décrits en temps égaux sont proportionnels aux arcs entiers de ces oscillations, il est clair que, quelles que soient ces oscillations, on aura toujours pour un temps donné les vitesses & les arcs décrits. Ce qu'il falloit premièrement trouver.

Supposez à présent que des corps suspendus à des fils oscillent dans des cycloïdes différentes, décrites dans l'intérieur de globes différens dont les forces absolues soient différentes: si on appelle V la force absolue d'un globe quelconque QOS , la force accélératrice, qui agit sur le pendule dans la circonférence de ce globe au lieu d'où le pendule commence à tomber, sera comme la distance au centre du globe, & comme la force absolue conjointement, c'est-à-dire, comme $CO \times V$. Donc la petite ligne décrite HK dans un instant donné, qui doit être proportionnelle à cette force, fera aussi comme $CO \times V$.

Mais

Mais en élevant la perpendiculaire ZY qui rencontre la circonférence en Z , l'arc naissant HZ qui est proportionnel à $\sqrt{GH \times HY}$ représente cet instant donné, donc cet arc naissant est comme $\sqrt{GH \times CO \times V}$, & par conséquent le temps d'une oscillation entière dans la cycloïde QRS (lequel temps est directement comme la demie circonférence HKM qui représente cette oscillation entière & inversement, comme l'arc HZ qui représente de même l'instant donné) devient comme GH directement & $\sqrt{GH \times CO \times V}$ inversement, c'est-à-dire, à cause des égales GH & SR , comme $\sqrt{\frac{SR}{CO \times V}}$, ou, par le Cor. de la Proposition 50. comme $\sqrt{\frac{AR}{AC \times V}}$. Donc, dans toutes les cycloï-

Fig. 111, 112.

des & dans tous les globes, les oscillations produites par des forces absolues quelconques sont en raison composée de la raison sous-doublée directe de la longueur du fil, & des raisons sous-doublées inverses de la distance entre le point de suspension & le centre du globe, & de la force absolue du globe. *C. Q. F. T.*

Cor. 1. On peut par ce moyen comparer le temps qu'un corps met à osciller avec celui qu'il mettrait à faire une révolution autour du même centre de forces, ou à descendre en ligne droite vers ce centre. Car si on fait le diamètre du cercle qui décrit la cycloïde dans le globe égal au demi diamètre de ce globe, la cycloïde deviendra une ligne droite qui passera par le centre du globe, en sorte que l'oscillation se changera alors en un mouvement d'ascension & de descente dans cette droite : & par le second cas de cette proposition, le temps de cette descente & de cette ascension perpendiculaire, ainsi que le temps qui lui est égal, dans lequel le corps, en tournant uniformément autour du centre du globe à une distance quelconque, décrit une moitié de sa révolution, est au temps d'une oscillation dans la cycloïde QRS comme 1 à $\sqrt{\frac{AR}{AC}}$.

Cor. 2. On tire aussi de-là ce que *Wren* & *Hughens* ont trouvé

Fig. XII. XII.

sur la cycloïde ordinaire. Car si le diamètre du globe est augmenté à l'infini, sa superficie se changera en un plan, la force centripète deviendra uniforme & dirigée suivant des lignes perpendiculaires à ce plan, & notre cycloïde ne sera plus que la cycloïde ordinaire. Dans ce cas, la longueur de l'arc de cycloïde, compris entre ce plan & le point décrivant, deviendra égale au quadruple du sinus versé de la moitié de l'arc du cercle roulant compris entre ce même plan & le point décrivant, comme *Wren* l'a trouvé : & le pendule suspendu entre deux cycloïdes oscillera dans une cycloïde semblable & égale en employant toujours le même temps, quelques inégales que soient ces oscillations, ainsi que l'a démontré *Hughens*. Enfin le temps de ces oscillations sera celui qu'*Hughens* a déterminé.

On peut appliquer les propositions qu'on vient de démontrer au système actuel de la terre, car les cloux des roues qui roulent sur la surface de la terre décrivent des épicycloïdes extérieures ; & les pendules qui feroient suspendus au dedans de la terre dans des cavernes entre deux arcs d'épicycloïdes intérieures feroient des oscillations isochrones. Car, comme on le verra au troisième livre, la gravité qui agit au dessus de la terre en raison renversée du carré des distances agit au dedans en raison de la simple distance au centre.

PROPOSITION LIII. PROBLÈME XXXV.

En supposant la quadrature des courbes, trouver les forces par lesquelles les corps feront toujours des oscillations isochrones dans des courbes données.

Fig. III.

Le corps *T* oscillant dans une ligne courbe quelconque *STRQ*, dont l'axe *AR* passe par le centre *C* des forces ; soit tirée *TX* qui touche cette courbe dans le lieu quelconque *T*, & soit pris sur cette tangente *TX* l'intervalle *TY* égal à l'arc *TR*, ce qui ne demande autre chose que la quadrature des courbes. Soit élevée ensuite sur la tangente la perpendiculaire *YZ*, laquelle ren-

contrant en Z la droite CT donnera TZ pour exprimer la force centripète cherchée. *C. Q. F. T.*

Car si la force TZ par laquelle le corps est tiré de T vers C est décomposée dans les forces TY , YZ , la partie YZ tirant le corps dans la direction du fil PT ne change rien à son mouvement; mais l'autre force TY accélérera ou retardera directement son mouvement dans la courbe $STRQ$. Ainsi, puisque cette force est comme l'arc TR à décrire, les accélérations ou retardations du corps dans deux oscillations de différente étendue seront toujours, dans les parties à décrire supposées proportionnelles, comme ces parties, & il arrivera par conséquent que ces parties seront décrites en même temps. Or les corps qui décrivent dans des temps égaux des parties toujours proportionnelles aux tous, décrivent aussi les tous en temps égal. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc si un corps T qui pend à un fil rectiligne AT attaché au centre A décrit l'arc circulaire $STRQ$, & que dans le même temps il soit poussé en en bas suivant des lignes parallèles par quelque force qui soit à la force uniforme de la gravité, comme l'arc TR à son sinus TN ; les temps de chacune des oscillations seront égaux. Car à cause des parallèles TZ , AR , les triangles ATN , ZTY seront semblables; & par conséquent on aura $TZ:AT::TY:TN$, c'est-à-dire, que si la force uniforme de la gravité est exprimée par la ligne donnée AT , la force TZ par laquelle les oscillations deviennent isochrones sera à la force de la gravité AT comme l'arc TR égal à TY est à son sinus TN .

Cor. 2. Et par conséquent dans les horloges, si les forces imprimées au pendule par la machine pour conserver le mouvement peuvent être tellement combinées avec la force de la gravité, que la force totale qui pousse le corps en en bas soit toujours comme la ligne qu'on a en divisant le rectangle sous l'arc TR & le rayon AR par le sinus TN , toutes les oscillations seront isochrones.

LIVRE
PREMIER.

Fig. 113.

Fig. 114.

PROPOSITION LIV. PROBLÈME XXXVI.

En supposant la quadrature des courbes, trouver les temps dans lesquels les corps montent & descendent dans des courbes quelconques par une force centripète quelconque, ces courbes étant décrites dans un plan qui passe par le centre des forces.

Fig. 115. Le corps tombant d'un lieu quelconque S le long de la courbe quelconque $ST\iota R$ donnée dans un plan qui passe par le centre C des forces, soit tirée CS que l'on suppose divisée dans un nombre innombrable de parties égales telles que Dd . Du centre C & des intervalles CD , Cd soient décrits les cercles DT , $d\iota$ qui rencontrent la courbe $ST\iota R$ en T & en ι , la Prop. 39. apprendra à trouver la vitesse en un point quelconque T en employant la loi de la force centripète donnée & la distance du centre C au point S d'où la chute a commencé. Mais le temps dans lequel le corps décrit la petite ligne $T\iota$ est en raison directe de la longueur de cette petite ligne, c'est-à-dire, de la sécante de l'angle ιTC , & en raison inverse de la vitesse. Donc si on élève au point D & perpendiculairement à CS l'appliquée DN proportionnelle à ce temps, l'aire $DNnd$, c'est-à-dire $DN \times Dd$, à cause de la donnée Dd , sera aussi proportionnelle à ce même temps, & par conséquent la courbe PNn , lieu des points N , donnera par son aire $SQPNd$ (comprise entre l'asymptote SQ perpendiculaire à CS , l'axe SD , l'appliquée DN , & l'arc infini NP) le temps que le corps S a employé à aller de S en T . C. Q. F. T.

PROPOSITION LV. THÉORÈME XIX.

Si pendant qu'un corps qui tend vers un centre de forces se meut librement sur une surface courbe quelconque dont l'axe passe par ce centre, on imagine sur un plan perpendiculaire à cet axe une courbe qui soit la projection orthogonale de la première, & qui soit parcourue

par un point qui réponde continuellement au corps mû sur la surface, ce point décrira des aires proportionnelles aux temps.

LIVRE
PREMIER.

Fig. 117.

Soit BKL la superficie courbe; T le corps qui fait sa révolution dans cette superficie; STR la trajectoire qu'il y décrit; S le commencement de cette trajectoire; OMK l'axe de la superficie courbe; TN la droite tirée perpendiculairement du lieu T sur l'axe; OP égale à TN sa projection sur le plan APO perpendiculaire à l'axe KO ; AP la projection de la trajectoire décrite dans ce même plan par le point P répondant au corps T ; A le commencement de cette projection répondant au point S ; TC la droite menée du corps au centre; TG la partie de cette droite proportionnelle à la force centripète qui pousse le corps vers le centre C ; TM la ligne droite perpendiculaire à la superficie courbe; TI la partie de cette ligne proportionnelle à la force par laquelle le corps presse cette superficie, & en est réciproquement pressé vers M ; PTF la droite parallèle à l'axe & qui passe par le lieu T ; GF , HI les droites abaissées perpendiculairement des points G & I sur cette parallèle PTF . Cela posé, je dis que l'aire AOP décrite par le point P autour de O depuis le commencement du mouvement est proportionnelle au temps.

Car la force TG (par le Cor. 2. des loix) se décomposera dans les forces TF , FG ; & la force TI dans les forces TH , HI : mais les forces TF , TH agissant dans la direction PF perpendiculaire au plan AOP ne changent le mouvement du corps T que dans le sens perpendiculaire à ce plan. Ainsi donc la partie de son mouvement qui se fait dans le sens du plan, c'est-à-dire, le mouvement du point P par lequel la projection AP de la trajectoire est décrite, demeure le même qu'il seroit, si les forces FT , TH étoient supprimées, & que les seules forces FG , HI agissent sur le corps, c'est-à-dire, le même qu'il seroit, si le corps décrivait la courbe AP dans le plan AOP , par une force centripète qui tendit au centre O , & qui fut égale à la

Fig. 117.

somme des forces FG, HI ; mais une telle force par la Prop. 1. feroit décrire au corps l'aire AOP proportionnelle au temps. Donc, &c. *C. Q. F. D.*

Fig. 116.

Cor. Par le même raisonnement, si un corps quelconque étoit sollicité par des forces qui tendissent vers deux ou plusieurs centres situés dans une même ligne droite donnée CO & qu'il décrivit dans un espace libre une courbe quelconque ST , l'aire AOP feroit toujours proportionnelle au temps.

PROPOSITION LVI. PROBLÈME XXXVII.

Supposant la quadrature des courbes, & connoissant la loi de la force qui tend vers un centre donné dans l'axe d'une surface courbe quelconque, on demande la trajectoire décrite sur cette surface par un corps poussé suivant une vitesse & une direction quelconque.

Fig. 117.

Les mêmes choses que dans la Proposition précédente & que le corps T parte du lieu donné S suivant une direction & avec une vitesse donnée; que T soit le lieu où ce corps est arrivé après un temps quelconque; Tt le petit arc parcouru pendant un instant donné, Pp la projection sur le plan BDO , c'est-à-dire, une petite partie de la projection APP de la trajectoire sur ce plan; la petite ellipse pQ la projection du cercle décrit sur la surface courbe du centre O & du rayon Tt ; Op le rayon tiré du centre O au point p .

Il est clair que la vitesse du corps T au point quelconque T fera donnée par la hauteur TC , ou, ce qui revient au même, par le rayon OP de la projection de la trajectoire, & que la grandeur des axes de la petite ellipse pQ ne dépendra non plus que de la même ligne. Donc à cause que le secteur POp est proportionnel au temps, on connoitra le point p intersection de cette ellipse & de Op , c'est-à-dire, que la position de Pp , ou, ce qui revient au même, le sinus de l'angle pPO ne dépendra encore que de OP . Or la relation connue entre Op & le sinus de pPO donnera facilement la projection AP en employant la

construction des courbes de la Prop. 41. & la projection *AP* étant connue donne tout de suite la trajectoire demandée.

LIVRE
PREMIER.

Fig. 117.

ONZIÈME SECTION.

Du mouvement des corps qui s'attirent mutuellement par des forces centripètes.

J'ai traité jusqu'ici des mouvemens des corps attirés vers un centre immobile, tel qu'il n'en existe peut-être aucun dans la nature ; car les attractions ont coutume de se faire vers des corps, & les actions des corps qui attirent & qui sont attirés sont toujours mutuelles & égales par la troisième loi. Si on ne considère, par exemple, que deux corps, ni le corps attiré, ni le corps attirant ne seront en repos ; mais ils feront l'un & l'autre, par leur attraction mutuelle, (selon le Corol. 4. des Loix) leur révolution autour de leur centre commun de gravité ; s'il y a plusieurs corps qui soient tous attirés vers un seul qu'ils attirent aussi, ou bien qui s'attirent tous mutuellement, ils doivent se mouvoir entr'eux de sorte que leur centre commun de gravité soit en repos, ou qu'il se meuve uniformément en ligne droite.

Je vais expliquer les mouvemens produits par ces forces que je nomme *attractions*, quoique peut-être je deusse plutôt les appeler *impulsions*, pour parler le langage des Physiciens ; mais je laisse à part les disputes qu'on peut élever sur cette dénomination, & je me sers des expressions les plus commodes pour les Mathématiciens.

PROPOSITION LVII. THÉORÈME XX.

Deux corps qui s'attirent mutuellement décrivent autour de leur centre commun de gravité, & autour l'un de l'autre, des figures semblables.

Les distances des corps au centre commun de gravité sont réciproquement proportionnelles à ces corps ; ainsi elles sont en

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

raison donnée l'une à l'autre, aussi bien qu'à la distance totale qui est entre les deux corps. De plus, ces distances sont transportées autour de leur terme commun d'un mouvement angulaire égal, parce que ces corps étant toujours posés en ligne droite l'un par rapport à l'autre, ne changent point leur inclinaison mutuelle, mais les droites, qui sont entr'elles en raison donnée, & qui sont transportées d'un mouvement angulaire égal autour de leurs extrémités, décrivent autour de ces mêmes extrémités des figures entièrement semblables dans des plans qui sont en repos avec ces termes, ou qui se meuvent d'un mouvement quelconque qui n'est point angulaire. Donc, &c. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION LVIII. THÉORÈME XXI.

Etant donnée, la loi des forces avec lesquelles deux corps s'attirent mutuellement, on peut, en supposant que l'un de ces corps soit fixe, donner telle impulsion à l'autre qu'il décrive autour de lui une courbe égale & semblable à celles que ces deux corps décrivent l'un autour de l'autre lorsqu'ils sont tous deux mobiles autour de leur centre commun de gravité.

Fig. 118. & 119. Que les corps *S* & *P* fassent leur révolution autour d'un centre commun de gravité *C*, l'un allant de *S* vers *T*, l'autre de *P* vers *Q*. Que d'un point donné *s*, on tire *sp*, *sq* toujours égales & parallèles à *SP* & à *QT*; la courbe *pqv*, que le point *p* décrit en tournant autour d'un point immobile *s*, sera semblable & égale aux courbes que les corps *S* & *P* décrivent mutuellement autour l'un de l'autre; & par conséquent, par le Théorème 20. elle sera semblable aux courbes *ST* & *PQV*, que ces mêmes corps décrivent autour de leur centre commun de gravité *C*.

Fig. 118. & 119. *Cas 1.* Ce commun centre de gravité *C*, par le Cor. 4. des loix, est en repos, ou se meut en ligne droite uniformément. Supposons premièrement qu'il soit en repos, & qu'il y ait en *s* & en *p* deux corps, desquels celui qui est immobile soit en *s*, & celui qui est mobile en *p*, & que ces corps soient égaux & semblables
aux

aux corps S & P . De plus, que les droites PR & pr touchent les courbes PQ & pq en P & p , & que les lignes CQ & sq soient prolongées en R & en r , à cause que les figures $CPRQ$, $spqr$ sont semblables, on aura $RQ:rq::CP:sp$, & par conséquent ces lignes seront en raison donnée. Ainsi, si la force par laquelle le corps P est attiré vers le corps S , & par conséquent vers le centre intermédiaire C , étoit à la force par laquelle le corps p est attiré vers le centre s , dans cette même raison donnée ; ces corps en temps égaux feroient retirés des tangentes PR , pr vers les arcs PQ , pq par des intervalles RQ , rq proportionnels à ces arcs, & par conséquent la force qui agit sur le corps p le feroit circuler dans une courbe pqu , qui feroit semblable à la courbe PQV , que la première force fait parcourir au corps P , & leurs révolutions s'achèveraient dans les mêmes temps.

Mais comme ces forces ne sont pas l'une à l'autre dans la raison de CP à sp ; qu'au contraire elles sont égales à cause que les corps S & s , P & p sont semblables & égaux, & que les distances SP , sp sont égales, ces corps dans des temps égaux feront également retirés de leurs tangentes. Donc, afin que le dernier corps p soit retiré d'un intervalle plus grand rq , il faut un temps plus long, lequel sera en raison sousdoublée de ces intervalles, à cause que les espaces au commencement du mouvement sont par le Lemme 10. en raison doublée des temps. Or, pour faire en sorte que le temps par l'arc pq soit au temps par l'arc PQ , comme sp à CP , il ne faut autre chose que prendre la vitesse du corps p à la vitesse du corps P , dans la même raison de sp à CP , puisque les espaces pq , PQ sont entr'eux dans la raison simple de sp à CP . Supposant donc de telles vitesses aux corps, ils seront toujours attirés par des forces égales, & décriront autour des centres en repos C & s les figures semblables PQV , pqv , desquelles la dernière pqv sera égale & semblable à la figure que le corps P décrit autour du corps mobile S . *C. Q. F. D.*

Cas 2. Supposons à présent que le commun centre de gravité se meuve uniformément en ligne droite avec l'espace dans lequel les corps se meuvent entr'eux, tous les mouvemens s'exécuteront dans cet espace comme auparavant, par le sixième Coroll. des Loix. Ainsi ces corps décriront mutuellement autour l'un de l'autre les mêmes figures qu'auparavant, lesquelles seront égales & semblables à la figure $p q v$. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Ainsi deux corps qui s'attirent mutuellement par des forces proportionnelles à leur distance décriront, par la Prop. 10. autour de leur centre commun de gravité, & autour l'un de l'autre, des ellipses concentriques; & réciproquement, si de telles figures sont décrites, les forces seront proportionnelles aux distances.

Cor. 2. Deux corps qui s'attirent avec des forces réciproquement proportionnelles au carré de leur distance décriront, par les Prop. 11. 12. & 13. autour de leur commun centre de gravité, & autour l'un de l'autre, des Sections coniques dont le foyer sera dans le centre autour duquel ces figures sont décrites; & réciproquement si de telles figures sont décrites, les forces centripètes seront réciproquement proportionnelles au carré de la distance.

Cor. 3. Deux corps quelconques qui tournent autour d'un centre commun de gravité décriront autour de ce centre, & autour d'eux-mêmes des aires proportionnelles au temps.

PROPOSITION LIX. THÉORÈME XXII.

Le temps périodique de deux corps S & P, qui font leur révolution autour de leur commun centre de gravité C, est au temps périodique de l'un ou l'autre de ces corps P, qui tourne autour d'un autre centre immobile S, & qui y décrit une figure égale & semblable à celle que ces corps décrivent mutuellement l'un autour de l'autre, en raison sous-doublée de l'autre corps S, à la somme $S + P$ de ces corps.

Par la démonstration de la Proposition précédente, les temps pendant lesquels les arcs quelconques semblables PQ & pq sont

décrits sont en raison fousdoublée des distances CP & SP ou sp , c'est-à-dire en raison fousdoublée du corps S à la somme $S + P$ de ces corps. Et par conséquent les sommes des temps employés à parcourir tous les arcs semblables PQ & pq , c'est-à-dire, les temps totaux des révolutions des corps S & P , sont dans cette même raison fousdoublée. C. Q. F. D.

PROPOSITION LX. THÉORÈME XXIII.

Si deux corps S & P , qui s'attirent mutuellement par des forces réciproquement proportionnelles au carré de leur distance, font leurs révolutions autour d'un centre de gravité commun; le grand axe de l'ellipse que l'un ou l'autre de ces corps P décrira par ce mouvement autour de l'autre corps S sera à l'axe principal de l'ellipse, que le même corps P peut décrire dans le même temps périodique autour de l'autre corps S , supposé en repos, comme la somme des deux corps $S + P$, à la première des deux moyennes proportionnelles entre cette somme & l'autre Corps S .

Car si les ellipses décrites étoient égales entr'elles, les temps périodiques (par le Théorème précédent) ieroient en raison fousdoublée du corps S à la somme $S + P$ de ces corps. Diminuant donc dans cette raison le temps périodique de la dernière ellipse, les temps périodiques deviendront égaux, & l'axe principal de l'ellipse, par la Prop. 15. diminuera dans la raison dont celle-là est sesquiplée, c'est-à-dire dans la raison dont la raison de S à $S + P$ est triplée; ainsi il sera à l'axe principal de l'autre ellipse, comme la première des deux moyennes proportionnelles entre $S + P$, & S est à $S + P$. Et réciproquement, l'axe principal de l'ellipse décrite autour du corps mobile sera à l'axe principal de l'ellipse décrite autour du corps immobile, comme $S + P$ à la première des deux moyennes proportionnelles entre $S + P$ & S . C. Q. F. D.



PROPOSITION LXI. THÉORÈME XXIV.

Si deux corps s'attirent mutuellement suivant une loi donnée à volonté, & se meuvent d'une façon quelconque sans éprouver aucune autre action, ils se mouveront comme s'ils ne s'attiroient pas mutuellement, & qu'ils fussent attirés l'un & l'autre avec les mêmes forces par un troisième corps placé dans leur centre commun de gravité : & la loi des forces attirantes sera la même, tant à l'égard de la distance de ces corps à ce centre commun, qu'à l'égard de la distance qui est entre ces corps.

Car les forces, par lesquelles ces corps s'attirent mutuellement, tendant à ces corps, tendent à leur commun centre de gravité qui est placé entr'eux ; ainsi elles sont les mêmes que si elles émanoient d'un corps intermédiaire. *C. Q. F. D.*

Et comme la raison de la distance de l'un ou l'autre de ces corps du commun centre de gravité à la distance qui sépare ces corps est donnée, la raison d'une puissance quelconque de la distance de l'un à la même puissance de la distance de l'autre sera aussi donnée, aussi bien que la raison d'une quantité quelconque, composée comme on voudra d'une de ces distances & de constantes quelconques, à une autre quantité, composée de la même manière de l'autre distance & d'autant de constantes qui auroient aux premières la raison donnée de ces distances. Ainsi, si la force par laquelle un corps est attiré par un autre est directement ou inversement comme la distance de ces corps entr'eux, ou comme une puissance quelconque de cette distance, ou enfin comme une quantité quelconque composée d'une façon quelconque de cette distance & de constantes, la même force, par laquelle le même corps sera attiré vers le commun centre de gravité, sera de même directement ou inversement comme la distance du corps attiré à ce commun centre de gravité, ou bien comme la même puissance de cette distance, ou enfin comme la quantité composée de même de cette distance, & de quan-

tités analogues données. C'est-à-dire que la loi de la force attirante sera la même, eu égard à la distance de l'un & de l'autre corps. C. Q. F. D.

PROPOSITION LXII. PROBLÈME XXXVIII.

Déterminer le mouvement de deux corps qui s'attirent mutuellement en raison renversée du quarré de leur distance, & qui partent de lieux donnés.

Par le théorème précédent, ces corps se moveront de même que s'ils étoient attirés par un troisiéme corps placé dans leur centre commun de gravité; & ce centre sera en repos dans le commencement du mouvement, par l'hypothese; donc, par le Cor. 4. des loix, il sera toujours en repos. Ainsi, en déterminant par la Prop. 17. les mouvemens des corps comme s'ils étoient sollicités par des forces tendantes à ce centre, on aura leur mouvement dans la supposition qu'ils s'attirent mutuellement. C. Q. F. T.

PROPOSITION LXIII. PROBLÈME XXXIX.

Déterminer le mouvement de deux corps qui s'attirent mutuellement en raison renversée du quarré de leur distance, & qui partent de lieux donnés, suivant des droites données, & avec des vitesses données.

Les mouvemens de ces corps, quand ils commencent à se mouvoir, étant donnés, le mouvement uniforme de leur commun centre de gravité est donné, ainsi que le mouvement de l'espace qui se meut uniformément en ligne droite avec ce centre, & le mouvement initial de ces corps par rapport à cet espace. Or les mouvemens, qui s'exécuteront ensuite dans cet espace, s'y exécuteront de la même manière (Théor. 24. & Cor. 5. des loix) que si cet espace & ce commun centre de gravité étoient en repos, & que ces corps ne s'attirassent point mutuellement, mais qu'ils fussent attirés par un troisiéme placé dans leur centre commun de gravité. Il faut donc déterminer, par le Problème 9. & par le 26. le mouvement de l'un de ces corps

dans cet espace mobile, en supposant qu'il parte d'un lieu donné suivant une droite donnée, avec une vitesse donnée, & qu'il soit sollicité par une force centripète tendante à ce centre, & on aura en même temps le mouvement de l'autre corps autour du même centre. Il faut ensuite composer ce mouvement avec le mouvement progressif & uniforme du système entier composé de l'espace & des corps qui y circulent, lequel a été trouvé ci-dessus, & on aura le mouvement absolu de ces corps dans l'espace immobile. C. Q. F. T.

PROPOSITION LXIV. PROBLÈME XL.

On demande le mouvement de plusieurs corps qui s'attirent tous mutuellement en raison directe de la distance.

Supposons premièrement deux corps T & L ayant un centre de gravité commun D . Ces corps décriront (Cor. 1. du Th. 21.), autour de D comme centre, des ellipses, desquelles on connoîtra la grandeur par le Problème 5.

Fig. 120. Qu'un troisième corps attire les deux premiers T & L avec des forces accélératrices ST , SL , & qu'il soit attiré à son tour par ces deux premiers, la force ST se décomposera, par le Cor. 2. des loix, dans les forces SD , TD , & la force SL dans les forces SD , DL . Or les forces DT , DL qui sont comme leur somme TL , & par conséquent comme les forces accélératrices par lesquelles les corps T & L s'attirent mutuellement, étant ajoutées aux forces des corps T & L , la première à la première, & la dernière à la dernière, composeront des forces proportionnelles aux distances DT & DL , comme auparavant, mais plus grandes que les premières forces; donc, par le Cor. 1. de la Prop. 10. & par les Coroll. 1. & 8. de la Prop. 4. elles feront décrire à ces corps des ellipses comme auparavant, mais avec un mouvement plus prompt.

Les autres forces accélératrices SD & SD , par leurs actions motrices $SD \times T$ & $SD \times L$, lesquelles sont comme les corps,

tirant ces corps également & suivant les lignes TI , LK parallèles à DS , ne changent rien à leurs situations respectives, mais elles font qu'ils approchent également de la ligne IK tirée par le milieu du corps S , & perpendiculaire à la ligne DS . Et ce mouvement vers la ligne IK pourra être nul en donnant au système des corps T & L d'une part, & au corps S de l'autre, des vitesses convenables pour les faire tourner autour du centre commun de gravité C : dans ce cas, le corps S décrira une ellipse autour de ce même point C , parce que la somme des forces motrices $SD \times T$ & $SD \times L$, lesquelles sont proportionnelles à la distance CS , tend vers le centre C . De plus, le point D , à cause des proportionnelles CS , CD , décrira une ellipse semblable à celle qui est décrite par le corps S . Donc les corps T & L attirés également, comme on l'a dit, par les forces motrices $SD \times T$ & $SD \times L$, le premier par la première, & le dernier par la dernière, suivant les lignes parallèles TI & LK , continueront (Cor. 5. & 6. des loix) à décrire leurs ellipses autour du centre mobile D comme auparavant. *C. Q. F. T.*

Fig. 120.

Qu'on ajoute ensuite un quatrième corps V , & on conclura par le même raisonnement que ce corps & le point C décriront des ellipses autour du commun centre de gravité B de tout le système, les mouvemens des premiers corps T , L & S autour des centres C & D subsistants toujours sans autre différence que d'être accélérés. Il en seroit de même, quelque fût le nombre des corps. *C. Q. F. T.*

C'est encore la même chose lorsque les corps T & L s'attirent mutuellement avec des forces accélératrices dont les intensités sont différentes de celles avec lesquelles ils attirent les autres corps relativement à leurs distances.

Et en général, il suit de ce qu'on vient de dire que toutes les fois que les attractions mutuelles accélératrices d'un nombre quelconque de corps seront entr'elles comme les distances multipliées par les corps attirants, tous ces corps décriront dans des

temps périodiques égaux des ellipses diverses autour de leur commun centre de gravité *B*, & dans un plan immobile. *C.Q.F.T.*

PROPOSITION LXV. THÉORÈME XXV.

Plusieurs corps dont les forces décroissent en raison doublée des distances à leurs centres peuvent décrire les uns autour des autres des courbes approchantes de l'ellipse, & décrire autour des foyers de ces courbes des aires à peu-près proportionnelles au temps.

On a donné dans la Proposition précédente le cas où les mouvemens s'exécutent dans des ellipses rigoureuses. Plus la loi des forces s'éloigne de la loi qu'on y a employée, & plus les corps troubleront leurs mouvemens mutuels; & il ne put arriver que les corps qui s'attirent mutuellement, selon la loi supposée ici, décrivent exactement des ellipses, à moins qu'ils ne conservent une certaine proportion dans leurs distances respectives.

Cas 1. Imaginons plusieurs petits corps qui font leur révolution autour d'un plus grand, à différentes distances de ce plus grand, & qui tendent tous les uns vers les autres avec des forces absolues proportionnelles à ces mêmes corps. Si ces corps révolvans sont assez petits pour que le corps autour duquel ils tournent ne s'écarte jamais sensiblement du centre de gravité, il est clair, par le Cor. 4. des loix, que ce corps approchera extrêmement d'être en repos ou de se mouvoir uniformément en ligne droite. De plus, ces petits corps tourneront autour de lui dans des ellipses, & décriront des aires proportionnelles au temps, abstraction faite des erreurs qui peuvent être causées, ou par le petit écart que fait le grand corps du centre commun de gravité, ou par les actions mutuelles de ces petits corps les uns sur les autres. Or on peut augmenter la petitesse des corps révolvans à un tel point, que cet écart & ces actions mutuelles soient moindres que toute quantité donnée; c'est-à-dire, jusqu'à ce que les orbites deviennent elliptiques, & que les aires soient proportionnelles au temps sans erreur sensible. *C. Q. F. M.*

Cas 2

Cas 2. Supposons qu'un système tel que celui dont on vient de parler, composé de petits corps qui font leurs révolutions autour d'un plus grand, ou qu'un système composé simplement de deux corps qui tournent l'un autour de l'autre, avance uniformément en ligne droite, & qu'en même temps ces corps soient sollicités par la force d'un autre corps beaucoup plus grand, & placé à une grande distance : comme les forces accélératrices égales, par lesquelles ces corps sont sollicités à se mouvoir suivant des lignes parallèles, ne changent point la situation respective de ces corps, mais qu'elles font seulement que le système entier, dont les parties conservent leurs mouvemens entr'elles, est transporté en même temps : il est clair, que les attractions vers le grand corps ne doivent causer d'autres altérations dans les attractions mutuelles de ces corps, que celles qui peuvent résulter de l'inégalité des attractions accélératrices, ou de l'inclinaison qu'ont entr'elles les lignes suivant lesquelles agissent ces attractions. Supposé donc que toutes les attractions accélératrices vers le grand corps soient entr'elles réciproquement comme les quarrés des distances ; en augmentant la distance du grand corps jusqu'à ce que les différences des longueurs des droites menées de ce grand corps aux petits, & que leurs inclinaisons réciproques soient moindres que toute quantité donnée, les mouvemens des parties de ce système entr'elles n'éprouveront point d'irrégularité qui ne soit plus petite que tout ce qu'on les voudroit supposer. Et comme à cause de la petite distance de ces parties entr'elles, tout le système entier sera attiré de la même manière que s'il consistoit en un seul corps, ce système éprouvera aussi le même mouvement par cette attraction, que si elle s'exerçoit sur un seul corps ; c'est-à-dire, que son centre de gravité décrira autour du grand corps une Section conique, & que les aires qu'il décrira autour de ce grand corps seront proportionnelles au temps, sans erreurs sensibles.. *C. Q. F. D.*

On pourroit par le même raisonnement aller à des cas plus composés à l'infini.

Cor. 1. Dans le second cas, plus le grand corps approche du système de deux ou de plusieurs corps, & plus les mouvemens des parties de ce système entr'elles seront troublés; parce qu'alors l'inclinaison mutuelle des lignes tirées du grand corps à ces autres corps est plus grande, ainsi que l'inégalité de la proportion.

Cor. 2. Ces mouvemens seront très-fortement troublés, si les attractions accélératrices des parties de ce système vers le plus grand corps ne sont plus entr'elles réciproquement comme le carré des distances à ce grand corps; sur-tout si l'inégalité de la proportion de cette attraction est plus grande que l'inégalité de la proportion des distances au grand corps. Car si la force accélératrice ne trouble point ces mouvemens entr'eux, lorsqu'elle agit également, & par des lignes parallèles, elle doit nécessairement les troubler, lorsqu'elle agit inégalement, & cela plus ou moins, selon que cette inégalité est plus ou moins grande. Car l'excès des plus grandes impulsions, exercées sur quelques-uns de ces corps & non exercées sur les autres, doit nécessairement changer leur position entr'eux; & ce dérangement, ajouté à celui qui naît de l'inégalité des lignes & de leur inclinaison, rendra le dérangement total plus sensible.

Cor. 3. Ainsi, si les parties de ce système se meuvent dans des ellipses ou dans des cercles sans aucune altération sensible, il est clair qu'elles ne sont sollicitées que très-foiblement par des forces accélératrices tendantes à d'autres corps, ou que ces forces agissent à peu près également sur elles, & suivant des lignes qui sont presque parallèles.



PROPOSITION LXVI. THÉORÈME XXVI.

LIVRE
PREMIER.

Si trois corps dont les forces décroissent en raison doublée des distances s'attirent mutuellement, & que les attractions accélératrices de deux quelconques vers le troisième, soient entr'elles en raison renversée du carré des distances, les plus petits tournant autour du plus grand; je dis que le corps le plus intérieur des deux petits décrira autour de ce grand corps des aires qui approcheront plus d'être proportionnelles au temps, & que la figure qu'il décrira approchera plus d'être une ellipse dont le foyer sera le centre des forces, si le grand corps est agité par les attractions des petits corps, que s'il étoit en repos, & qu'il n'éprouvât aucune attraction de leur part, ou qu'il fût beaucoup plus ou beaucoup moins agité en vertu d'une attraction beaucoup plus ou beaucoup moins forte.

Cette Proposition suit assez naturellement du Cor. 2. de la Proposition précédente; mais je vais encore la prouver par des argumens plus précis, & plus pressans.

Cas 1. Que les plus petits corps P & S tournent dans le même plan, autour du plus grand T ; P décrivant l'orbite intérieur PAB , & S l'extérieure ESE . Que SK soit la moyenne distance des corps P & S , & que cette ligne SK exprime l'attraction de P vers S à la moyenne distance. En prenant SL à SK en raison doublée de SK à SP , SL sera l'attraction accélératrice de P vers S , à une distance quelconque SP , & cette force SL se décomposera dans les deux forces SM, LM , en menant LM parallèle à la ligne qui joint P & T .

Fig. 121.

Cela posé, il est clair que le corps P sera sollicité par trois forces: la première tend à T & vient de l'attraction mutuelle des corps T & P ; & l'effet de cette force, si elle étoit seule, feroit de faire décrire au corps P autour du corps T (soit que ce corps fût immobile, soit qu'il fût animé de la même attraction) des aires proportionnelles au temps, & une ellipse dont le foyer seroit T . Ce qui paroît clairement par la Prop. 11. & par les Cor. 2. & 3. du Théor. 21.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. 121.

La seconde force qui agit sur P est l'attraction LM , laquelle tendant de P à T s'ajouteroit à la première, & produiroit toujours des aires proportionnelles au temps (Cor. 3. Théor. 21.); mais n'étant pas réciproquement proportionnelle au carré des distances, la somme des deux forces ne se trouveroit pas non plus dans cette raison, & s'en écarteroit d'autant plus que ces deux forces auroient une plus grande proportion l'une à l'autre. Or, comme par la Prop. 11. & par le Cor. 2. du Théor. 21. la force nécessaire pour faire décrire une ellipse autour du foyer T doit tendre vers ce foyer, & être réciproquement proportionnelle au carré de la distance PT , l'orbe PAB s'écartera de la forme elliptique, & cela d'autant plus qu'il y aura une plus grande proportion entre les deux forces qui composent celle de P vers T , toutes choses étant supposées d'ailleurs égales.

La troisième force qui agit sur P est la force SM , laquelle tirant le corps P selon une ligne parallèle à ST composera avec les forces précédentes une force qui ne sera plus dirigée de P vers T , & qui s'éloignera d'autant plus de cette détermination, que la proportion de cette troisième force aux premières sera plus grande, toutes choses égales: par cette force le corps P ne décrira plus des aires proportionnelles au temps autour du corps T , & les aires s'éloigneront d'autant plus de cette proportionnalité, que le rapport de la troisième force aux deux premières sera plus grand. L'altération que souffrira par cette troisième force l'orbe PAB dans la forme elliptique que donne la première, sera augmentée par deux causes, parce que cette force n'est pas dirigée de P vers T , & parce qu'elle n'est pas réciproquement proportionnelle au carré de la distance PT .

Ceci étant bien entendu, il est clair, que les aires approcheront d'autant plus d'être proportionnelles au temps, que la troisième force sera moindre, les autres forces restant les mêmes, & que l'orbite PAB approchera d'autant plus de la forme elliptique, que la seconde & la troisième force, mais principalement

la troisième, seront moindres, la première demeurant la même.

Si l'attraction accélératrice du corps T vers S est représentée par la ligne SN ; & que les attractions accélératrices SN , SM soient égales, elles ne changeront rien à la position des corps P & T entr'eux, parce qu'elles les tireront également, & selon des lignes parallèles; ainsi les mouvemens de ces corps seront les mêmes qu'ils seroient sans ces attractions (Cor. 6. des Loix), & par la même raison, si l'attraction SN étoit moindre que l'attraction SM , elle en détruiroit une partie égale à SN , & ce seroit la partie restante MN qui dérangeroit la forme elliptique de l'orbe, & la proportionnalité des aires & des temps. Si l'attraction SN étoit plus forte que l'attraction SM , l'altération dans la proportionnalité des aires & dans l'orbite seroit causée de même par leur seule différence MN . Par l'attraction SN , la troisième force SM est donc toujours réduite à l'attraction MN , la première & la seconde attraction restant entièrement les mêmes; & par conséquent les aires & les temps approcheront le plus de la proportionnalité, & l'orbite PAB de la forme elliptique dont on a parlé, lorsque l'attraction MN sera ou nulle ou la plus petite qu'il est possible, ce qui arrivera lorsque les attractions accélératrices des corps P & T vers le corps S approcheront, autant qu'il est possible, de l'égalité; c'est-à-dire, lorsque l'attraction SN ne sera pas nulle, ni moindre que la plus petite de toutes les attractions SM , mais qu'elle sera à peu près moyenne entre la plus grande & la plus petite de toutes les attractions SM , ou, ce qui revient au même, lorsqu'elle n'est ni beaucoup plus forte, ni beaucoup plus foible que l'attraction SK . C. Q. F. D.

Cas 2. Que les petits corps P & S tournent autour du plus grand T dans des plans différens, la force LM , qui agit suivant la ligne PT placée dans le plan de l'orbite PAB , aura le même effet qu'auparavant, & elle ne retirera point le corps P du plan de son orbite; mais l'autre force MN qui agit suivant une ligne parallèle à ST (& est par conséquent inclinée au plan de

LIVRE
PREMIER.

Fig. 121.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. 121.

l'orbite PAB quand le corps S se trouve hors de la ligne des nœuds) causera, outre l'altération en longitude dont on vient de parler, une altération au mouvement en latitude; cette altération pour une position quelconque des corps P & T , sera comme la force MN qui l'a causée; ainsi elle sera la plus petite quand MN sera la plus petite, c'est-à-dire; comme je l'ai déjà fait voir, lorsque l'attraction SN ne sera ni beaucoup plus forte, ni beaucoup plus foible que l'attraction SK . C. Q. F. D.

Cor. 1. On tire facilement de là, que si plusieurs petits corps P , S , R , &c. font leurs révolutions autour d'un plus grand T , le mouvement du plus intérieur P sera le moins troublé qu'il est possible par les attractions des corps extérieurs; lorsque le plus grand corps T sera attiré & agité pareillement par les autres, en raison de leurs forces accélératrices, & qu'il les attirera réciproquement.

Cor. 2. Dans un système composé de trois corps T , P , S , si les attractions accélératrices de deux quelconques sur le troisième sont réciproquement entr'elles comme le quarré des distances, les aires que le corps P décrira autour du corps T seront plus accélérées auprès de la conjonction A & de l'opposition B , qu'auprès des quadratures C & D . Car toute force qui agit sur le corps P , sans agir sur le corps T , & qui n'est point dirigée vers PT , accélère ou retarde la description de l'aire selon qu'elle est dirigée en conséquence ou en antécédence; telle est la force NM . Dans le passage du corps P de C en A , elle tire en conséquence; ensuite depuis A jusqu'en D , elle tire en antécédence; puis de D en B , elle tire en conséquence, & enfin en antécédence de B en C .

Cor. 3. Et par le même raisonnement, il est clair que le corps P , toutes choses d'ailleurs égales, se meut plus vite dans la conjonction & dans l'opposition, que dans les quadratures.

Fig. 121.

Cor. 4. L'orbe du corps P , toutes choses d'ailleurs égales, est plus courbe dans les quadratures que dans la conjonction & l'opposition; car les corps qui ont le plus de vitesse s'écartent le moins

du cours rectiligne. D'ailleurs la force KL ou MN , dans la conjonction & dans l'opposition, est contraire à la force par laquelle le corps T tire le corps P ; & par conséquent elle diminue cette force, & le corps P doit moins se détourner du cours rectiligne lorsqu'il est moins tiré vers T .

Cor. 5. De-là le corps P , le reste étant égal, s'écartera plus du corps T dans les quadratures que dans l'opposition & la conjonction. Toutes ces choses supposent qu'il n'y ait pas de mouvement d'excentricité; car si l'orbite du corps P est excentrique, son excentricité (comme on le verra dans le Cor. 9. de cette Prop.) deviendra la plus grande, lorsque les apfides seront dans les syzygies; & delà il peut arriver que le corps P arrivant au sommet de l'apfide la plus haute, soit plus loin du corps T dans les syzygies que dans les quadratures.

Cor. 6. Parce que la force centripète du corps central T , laquelle retient le corps P dans son orbite, est augmentée dans les quadratures par l'addition de la force LM , qu'elle est diminuée dans les syzygies par la soustraction de la force KL , & qu'à cause de la grandeur de la force KL , la diminution est plus grande que l'augmentation; que d'ailleurs cette force centripète vers T , par le Cor. 2. de la Prop. 4. est en raison composée de la raison simple & directe de $P.T$, & de la raison renversée du carré du temps périodique: il est clair, que cette raison composée sera diminuée par l'action de la force KL , & par conséquent que le temps périodique (si le rayon $P.T$ de l'orbe reste le même) fera augmenté dans la raison sousdoublée de celle suivant laquelle cette force centripète sera diminuée; de plus, par le Cor. 6. de la Prop. 4. si le rayon augmente ou diminue, le temps périodique fera plus augmenté ou moins diminué que suivant la proportion sesquiplée de ce rayon.

Si la force du corps central venoit à diminuer, le corps P étant de moins en moins attiré s'éloigneroit davantage du centre T ; & au contraire, si cette force du corps central augmentoit, le

Fig 121.

corps P s'approcheroit plus du centre. Donc, si l'action du corps éloigné S , par laquelle cette force est diminuée, augmente & diminue tour à tour, le rayon TP augmentera & diminuera aussi successivement; & le temps périodique augmentera & diminuera dans la raison composée de la raison sesquiplée du rayon & de la raison souse doublée de la proportion suivant laquelle cette force centripète du corps central T augmente & diminue par l'incrément ou le décrement de l'action du corps éloigné S .

Cor. 7. De tout ce que nous venons de dire, il suit que l'axe de l'ellipse décrite par le corps P , ou la ligne des apfides, avance & rétrograde tour à tour d'un mouvement angulaire, de façon cependant que le mouvement en avant est le plus fort, & qu'à la fin de chaque révolution de P , la ligne des apfides s'est mue en conséquence.

Car la force qui pousse le corps P vers T dans les quadratures, où la force MN s'évanouit, est composée de la force LM & de la force centripète par laquelle le corps T attire le corps P . La première force LM , si on augmente la distance PT , augmentera à peu près dans la même raison que cette distance, & la dernière force décroîtra dans cette raison doublée. Donc la somme de ces forces décroîtra dans une moindre raison que la raison doublée de la distance PT , & par conséquent (Cor. 1. de la Prop. 45.) elle fera rétrograder la plus haute apside.

Mais dans la conjonction & dans l'opposition, la force par laquelle le corps P est porté vers le corps T est la différence entre la force par laquelle le corps T attire le corps P , & la force KL , & cette différence, à cause que la force KL augmente à peu près dans la raison de la distance PT , décroît dans une plus grande raison que la raison doublée de la distance PT ; ainsi par le Cor. 1. de la Prop. 45. elle fera avancer la plus haute apside. Dans les lieux placés entre les syzygies & les quadratures, le mouvement de la plus haute apside dépend de ces deux causes, en sorte que selon l'excès de l'efficacité de l'une ou de l'autre, la plus.

haute apside avancera ou rétrogradera. Ainsi comme la force KL dans les syzygies est presque double de la force LM dans les quadratures, l'effet résultant de ces deux forces dans toute la révolution sera dans le même sens que la force KL ; c'est-à-dire, que la plus haute apside sera portée en conséquence.

Les vérités établies dans ce Corollaire & dans le précédent se comprendront plus aisément en supposant que le système des deux corps T & P soit environné de toutes parts de plusieurs corps S, S, S , &c. placés dans l'orbe $ES E$; car par l'action de ces corps, celle du corps T sera diminuée dans tous les lieux, & par conséquent elle décroîtra dans une raison plus que doublée de la distance.

Cor. 8. Comme le progrès ou la rétrogradation des apsides dans le passage du corps de l'apside la plus basse à la plus haute, dépend du décrement de la force centripete dans une plus grande ou une moindre raison que la raison doublée de la distance PT , & de son incrément semblable dans le retour du corps à l'apside la plus basse ; & que par conséquent ce progrès ou cette rétrogradation est dans son *maximum*. lorsque la proportion de la force dans l'apside la plus haute à la force dans l'apside la plus basse s'éloigne le plus de la raison doublée inverse des distances ; il est clair que les apsides étant dans leurs syzygies avanceront le plus vite par la soustraction de la force KL ou $NM - LM$, & que dans leurs quadratures elles rétrograderont le plus lentement par l'addition de la force LM . Or à cause de la longueur du temps pendant lequel la vitesse de ce progrès & le retardement de cette rétrogradation sont continués, cette inégalité devient extrêmement grande.

Cor. 9. Si un corps, par une force réciproquement proportionnelle au carré de la distance au centre, se meut autour de ce centre dans une ellipse, & qu'ensuite dans sa descente de l'apside la plus haute à la plus basse, cette force par l'addition perpétuelle d'une nouvelle force soit augmentée dans une raison plus grande que la doublée inverse de la distance, il est clair

LIVRE
PREMIER.

Fig. 121.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. 121.

que ce corps, étant poussé sans cesse vers le centre par l'addition perpétuelle de cette nouvelle force, s'approchera davantage de ce centre, que s'il n'y étoit porté que par la seule force en raison doublée inverse de la distance; ainsi il décrira autour de ce centre un orbe qui sera intérieur à l'orbe elliptique qu'il décrivait; & dans l'apside la plus basse il s'approchera plus du centre qu'auparavant: donc son orbe, par l'addition de cette nouvelle force, deviendra plus excentrique. Si ensuite, lorsque le corps va de l'apside la plus basse à la plus haute, la force décroît par les mêmes degrés par lesquels elle avoit augmenté auparavant, le corps retourneroit à la première distance; & par conséquent, si la force décroît dans une plus grande raison, le corps étant moins attiré monteroit à une plus grande hauteur, & l'excentricité de son orbe augmenteroit encore davantage. Ainsi, si la raison de l'incrément & du décrement de la force centripète augmente à chaque révolution, l'excentricité augmentera toujours; & au contraire, elle diminuera toujours, si cette même raison décroît.

Dans le système des corps T, P, S , lorsque les apsides de l'orbe PAB sont dans les quadratures, cette raison de l'incrément & du décrement est la plus petite, & elle devient la plus grande lorsque les apsides sont dans les syzygies. Si les apsides sont dans les quadratures, la raison près des apsides est moindre que la raison doublée des distances, & elle est au contraire plus grande près des syzygies: & c'est de cette plus grande raison que naît le mouvement direct de l'apside la plus haute, comme on l'a déjà dit; mais si l'on considère la raison de tout l'incrément ou de tout le décrement dans le progrès entre les apsides, elle est moindre que la raison doublée des distances. La force dans l'apside la plus basse est à la force dans l'apside la plus haute, dans une moindre raison que la raison doublée de la distance de la plus haute apside au foyer de l'ellipse, à la distance de l'apside la plus basse à ce même foyer; & au contraire, lorsque les apsides sont dans les syzygies, la force dans l'apside la plus basse est à la force dans

l'apside la plus haute, dans une plus grande raison que la raison doublée des distances; car les forces LM dans les quadratures étant ajoutées aux forces du corps T composent des forces qui sont dans une moindre raison, & les forces KL dans les syzygies étant ôtées des forces du corps T font que les forces restantes sont dans une plus grande raison.

La raison de tout l'incrément & de tout le décrement dans le passage entre les apsides est donc la moindre dans les quadratures, & la plus grande dans les syzygies; & par conséquent dans le passage des apsides des quadratures aux syzygies, elle augmentera perpétuellement, & elle augmentera l'excentricité de l'ellipse; mais dans le passage des syzygies aux quadratures, elle diminuera continuellement, & l'excentricité diminuera aussi.

Cor. 10. Pour chercher la loi des dérangemens en latitude, supposons que le plan de l'orbite EST reste immobile; il est clair que la partie ML des forces MN, ML , en quoi consiste la cause totale des dérangemens, agissant toujours dans le plan de l'orbite PAB , ne trouble jamais le mouvement en latitude; & que la force MN qui agit aussi dans le plan de cette même orbite, lorsque les nœuds sont dans les syzygies, ne dérange point alors ces mouvemens, au lieu qu'elle les dérange beaucoup lorsqu'ils sont dans les quadratures; car alors en retirant continuellement le corps P du plan de son orbite elle diminue l'inclinaison du plan dans le passage du corps des quadratures aux syzygies, & elle l'augmente au contraire dans son passage des syzygies aux quadratures. D'où il arrive que le corps étant dans les syzygies, l'inclinaison du plan est la plus petite, & qu'elle retourne à sa première grandeur à peu près, lorsque le corps arrive au nœud le plus voisin. Mais lorsque les nœuds seront dans les octans après les quadratures, c'est-à-dire entre $C \& A, D \& B$, on comprendra, par ce qu'on vient de dire, que dans le passage du corps P de l'un ou l'autre nœud au quatre-vingt-dixième degré suivant, l'inclinaison du plan diminuera perpétuellement; & qu'ensuite dans le passage

LIVRE
PREMIER.

Fig. 121.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. 121.

par les quarante-cinq degrés prochains jusqu'à la quadrature prochaine, l'inclinaison augmentera, & qu'elle diminuera ensuite de nouveau dans le passage du corps par les quarante-cinq autres degrés jusqu'au nœud prochain. Ainsi cette inclinaison diminuera plus qu'elle n'augmentera, & par conséquent elle est toujours moindre dans le nœud qui suit, que dans celui qui précède; & par le même raisonnement, l'inclinaison augmentera plus qu'elle ne diminuera, lorsque les nœuds seront dans les autres octans A & D , B & C . Elle sera donc la plus grande, lorsque les nœuds seront dans les syzygies. Dans leur passage des syzygies aux quadratures, elle diminuera à chaque fois que le corps parviendra aux nœuds; & elle deviendra la plus petite, lorsque les nœuds seront dans les quadratures, & le corps dans les syzygies; & elle croîtra ensuite par les mêmes degrés par lesquels elle avoit diminué auparavant; & lorsque les nœuds arriveront aux syzygies prochaines, elle reviendra à sa première grandeur.

Cor. 11. Comme le corps P , lorsque les nœuds sont dans les quadratures, est continuellement retiré du plan de son orbite du côté de S dans son passage du nœud C par la conjonction A au nœud D ; & du côté opposé dans son passage du nœud D par l'opposition B au nœud C : il est clair que dans son mouvement depuis le nœud C , le corps s'éloignera perpétuellement du premier plan CD de son orbite, jusqu'à ce qu'il soit parvenu au nœud prochain, qui sera très-éloigné de ce plan CD , & qui, au lieu d'être placé en D dans l'autre intersection de ce plan avec le plan EST , sera placé du côté de S , c'est-à-dire en antécédence, & par le même raisonnement, les nœuds continueront à s'éloigner dans le passage du corps de ce nœud au nœud qui suit.

Les nœuds étant dans les quadratures rétrograderont donc toujours; dans les syzygies, où rien ne trouble le mouvement en latitude, ils seront en repos; & dans les lieux intermédiaires où ils participeront de l'une & l'autre condition, ils rétrograderont plus lentement. Ainsi étant toujours stationnaires ou rétrogrades,

ils seront portés en antécédence à chaque révolution.

Cor. 12. Tous les dérangemens dont on a parlé dans ces Corollaires sont un peu plus grands dans la conjonction des corps P & S , que dans leur opposition, parce que les forces NM & ML qui les causent sont plus grandes.

Cor. 13. Comme on n'a point fait entrer la grandeur du Corps S dans la démonstration des Corollaires précédens, tout ce qu'on vient de dire aura lieu, lorsque la grandeur de ce corps sera telle que le système des deux corps T & P tournera autour de lui. Et comme le corps S étant plus grand, la force centripète qui cause les dérangemens du corps P est plus grande; tous ces dérangemens seront plus grands à des distances égales dans ce cas, que dans celui, où le corps S tourne autour du système des corps P & T .

Cor. 14. Comme les forces MN , ML , lorsque le corps S est fort éloigné, sont à peu près en raison composée de la force SK , & de la raison de PT à ST , c'est-à-dire, si la distance PT & la force absolue du corps S sont données, en raison renversée de ST^3 , & que ces forces MN , ML sont les causes des dérangemens & de tous les effets dont on a parlé dans les Corollaires précédens: il est clair que tous ces effets seront à peu près en raison composée de la raison directe de la force absolue du corps S & de la raison triplée inverse de la distance ST , lorsqu'on suppose que le système des corps P & T reste le même, tandis qu'on fait varier la distance ST , & la force absolue du corps S . Ainsi, si le système des corps T & P tourne autour d'un corps très-éloigné S , les forces MN , ML , & leurs effets seront (*Cor. 2. & 6. de la Prop. 4.*) réciproquement en raison doublée du temps périodique, & par conséquent, si la grandeur du corps S est proportionnelle à sa force absolue, ces forces MN , ML , & leurs effets seront directement comme le cube du diamètre apparent du corps éloigné S vu du lieu T , & au contraire. Car ces raisons sont

LIVRE
PREMIER.

Fig. 121.

les mêmes que la raison composée dont on a parlé ci-dessus.

Cor. 15. Si la forme des orbes ESE , BAP , leur inclinaison & leurs proportions entre elles restent les mêmes pendant que leur grandeur change; & si les forces des corps S & T sont constantes ou varient dans une raison donnée quelconque; comme alors ces forces (c'est-à-dire, la force du corps T , par laquelle le corps P décrit l'orbite PAB ; & la force du corps S qui fait écarter le corps P de cette orbite) agissent toujours de la même manière & dans la même proportion, il est nécessaire que tous les effets soient semblables & proportionnels, & que les temps de ces effets soient aussi proportionnels; c'est-à-dire, que toutes les altérations linéaires soient comme les diamètres des orbites, que les angulaires soient les mêmes qu'auparavant, & que les temps des dérangemens linéaires semblables ou des angulaires égaux soient comme les temps périodiques des orbites.

Cor. 16. Ainsi, si la forme des orbites, & leur inclinaison mutuelle restent les mêmes, la grandeur des corps, leurs forces, & leurs distances changent d'une manière quelconque & qu'on connoisse les dérangemens & les temps des dérangemens dans un cas quelconque, on en pourra conclure à peu près les dérangemens, & les temps des dérangemens pour tout autre cas. Mais on y parviendra d'une manière plus prompte par la méthode suivante.

Les forces LM , MN sont comme le rayon TP , tout le reste demeurant le même, & leurs effets périodiques, c'est-à-dire, les dérangemens linéaires de P (*Cor. 2. du Lemme 10.*) sont comme ces forces, & le quarré du temps périodique de P conjointement. De-là, les erreurs angulaires du corps P , vû du centre T , (c'est-à-dire, tant le mouvement de ses nœuds & de ses apfides, que tous les dérangemens apparens en latitude & en longitude) sont dans une révolution quelconque du corps P , comme le quarré du temps d'une révolution à peu près,

Composant donc cette raison avec celle du Cor. 14. on trouvera que dans un système quelconque de corps P , S , T , dans lequel P tourne autour de T dont il est proche, & T autour de S qui est éloigné, les dérangemens angulaires du corps P tels qu'ils paroissent du centre T seront à chaque révolution de ce corps P comme le quarré du temps périodique P directement, & le quarré du temps périodique de T inversement. Et ainsi le mouvement moyen des apsides sera en raison donnée au mouvement moyen des nœuds, & l'un & l'autre mouvement fera comme le quarré du temps périodique du corps P directement, & le quarré du temps périodique du corps T inversement. En augmentant ou diminuant l'excentricité & l'inclinaison de l'orbite PAB , les mouvemens des apsides & des nœuds ne changeront pas sensiblement, à moins que les changemens de l'excentricité & de l'inclinaison ne fussent fort grands.

Cor. 17. Comme la ligne LM est tantôt plus grande, & tantôt plus petite que le rayon PT , exprimant la force moyenne LM par PT , elle sera ainsi à la force moyenne SK ou SN qu'on peut exprimer par la ligne ST , comme PT est à ST . Mais la force moyenne SN ou ST , par laquelle le corps T est retenu dans son orbite autour de S , est à la force par laquelle le corps P est retenu dans son orbite autour de T , en raison composée de la raison du rayon ST au rayon PT , & de la raison doublée du temps périodique du corps P autour du corps T au temps périodique du corps T autour du corps S : donc, la force moyenne LM est à la force par laquelle le corps P est retenu dans son orbite autour de T (ou à celle avec laquelle le même corps P pourroit tourner dans le même temps périodique autour d'un point quelconque immobile T à la distance PT) dans cette même raison doublée des temps périodiques. Donc, les temps périodiques étant donnés, ainsi que la distance PT , la force moyenne LM sera donnée; & cette force LM étant

LIVRE
PREMIER.

Fig. 121.

donnée, la force MN le fera aussi à peu près par la proportion des lignes PT , MN .

Cor. 18. Imaginons plusieurs corps fluides qui se meuvent autour d'un même corps T , à des distances égales & par les mêmes loix par lesquelles le corps P tourne autour du corps T ; supposons ensuite que de tous ces corps fluides contigus, il se forme un anneau fluide circulaire & concentrique au corps T ; chaque partie de cet anneau suivant dans tous ses mouvemens la loi du corps P , ces parties approcheront plus près du corps T , & elles se mouveront plus vite dans leurs conjonctions & leurs oppositions avec le corps S que dans leurs quadratures; & les nœuds de cet anneau, ou ses intersections avec le plan de l'orbite du corps S ou T seront en repos dans les syzygies; mais hors des syzygies ils se mouveront en antécédence, & leur mouvement sera plus prompt dans les quadratures, & plus lent dans les autres lieux. L'inclinaison de l'anneau variera aussi, & son axe oscillera à chaque révolution, & après une révolution entière il retournera à son premier état, à la différence près que produit la précession des nœuds.

Cor. 19. Supposons à présent que le globe T formé de matière solide s'étende jusqu'à cet anneau, qu'il contienne de l'eau dans un canal creusé autour de lui, & qu'il tourne autour de son axe uniformément d'un mouvement commun périodique. Le mouvement de cette eau étant accéléré & retardé tour à tour, comme dans le cas exposé au corollaire précédent, sera plus prompt dans les syzygies & plus lent dans les quadratures, que celui de la superficie de ce globe, & ainsi il y aura dans ce canal un flux & un reflux tel que celui de la mer.

Cette eau en tournant autour du centre du globe, lequel centre est en repos, n'acquerreroit aucun mouvement de flux & de reflux si l'attraction du corps S n'avoit pas lieu; car il arrive la même chose à un globe qui se meut uniformément en ligne droite, & qui tourne en même-temps autour de son centre (*Cor. 5.*
des

des loix) qu'à un globe qui seroit détourné uniformement du mouvement rectiligne (Cor. 6. des loix). Qu'on imagine de plus l'attraction du corps *S*, & alors l'inégalité de cette attraction troublera le mouvement de l'eau, puisque les parties de l'eau les plus voisines seront plus attirées, & les plus éloignées le seront moins. La force *LM* attirera l'eau en en bas dans les quadratures, & la fera descendre jusqu'aux syzygies; au contraire, la force *KL* l'attirera en en haut dans les syzygies, l'empêchera de descendre davantage & la fera monter jusqu'aux quadratures, à la retardation près qui est produite dans le flux & le reflux de l'eau, par le frottement du fonds.

Cor. 20. Si l'on suppose à présent que l'anneau devienne solide, & que le globe soit diminué, le mouvement de flux & de reflux cessera; mais le mouvement oscillatoire de l'inclinaison, & la précession des nœuds subsisteront.

Si on suppose ensuite que le globe ait le même axe que l'anneau, qu'il achève ses révolutions dans le même temps, qu'il le touche, & lui soit attaché par sa superficie intérieure; le globe participant du mouvement de l'anneau, ils oscilleront ensemble, & les nœuds rétrograderont. Car le globe (comme on le dira bientôt) est également susceptible de recevoir toutes sortes d'impressions.

Le plus grand angle d'inclinaison de l'anneau qui entoure le globe est dans le lieu où les nœuds sont dans les syzygies.

Donc, dans le progrès des nœuds vers les quadratures, l'anneau est contraint de diminuer son inclinaison, & par cet effort il imprime un mouvement à tout le globe; le globe retient le mouvement imprimé jusqu'à ce que l'anneau le lui ôte par un effort contraire, & qu'il lui en imprime un nouveau dans un sens opposé: ainsi par cette raison, le plus grand mouvement de l'inclinaison décroissante se fait dans les quadratures des nœuds, & le plus petit angle d'inclinaison se fait dans les octans après les quadratures; le plus grand mouvement de réclinaison est dans les

 LIVRE
PREMIER.

Fig. 121.

Fig. 121.

syzygies, & le plus grand angle dans les octans prochains. Il en est de même d'un globe qui n'a point d'anneau, & qui est un peu plus élevé, ou un peu plus dense vers l'équateur que vers les Pôles; car cette protubérance de matière dans les régions de l'équateur lui tient lieu d'anneau, & quoiqu'en augmentant d'une façon quelconque la force centripète de ce globe, toutes ses parties soient supposées tendre en en bas, de même que les parties gravitantes de la terre, cependant les phénomènes dont on a parlé dans ce Corollaire & dans le précédent, en seront à peine altérés, il y aura seulement cette différence, que les lieux des plus grandes & des moindres hauteurs de l'eau ne seront pas les mêmes, car l'eau restera dans son orbite, & y sera retenue, non par sa force centrifuge, mais par les parois du lit dans lequel elle coule. De plus, la force LM l'attire plus fortement en en bas dans les quadratures, & la force KL ou $NM - LM$ l'attire plus fortement en en haut dans les syzygies. Et ces forces réunies cessent d'attirer l'eau en en bas, & commencent à l'attirer en en haut dans les octans avant les syzygies, & elles cessent de l'attirer en en haut, & commencent à l'attirer en en bas dans les octans après les syzygies; & par conséquent la plus grande élévation de l'eau peut arriver à peu près dans les octans après les syzygies, & la plus petite vers les octans après les quadratures; à moins que le mouvement d'ascension & de descension, imprimé à l'eau par ces forces, ne se conserve un peu plus long temps par la force d'inertie de l'eau, ou ne se perde un peu plutôt par les frottemens de l'eau contre le lit qui la contient.

Cor. 21. Par la même raison que la matière redondante placée à l'équateur fait rétrograder les nœuds, & les fait rétrograder d'autant plus qu'elle est en plus grande quantité, il s'enfuit, que si on la diminue, la rétrogradation diminuera aussi; que si on la détruit entièrement, il n'y aura plus de rétrogradation; & enfin, que si on enlevait du globe plus que cette matière redondante,

qu'on le rendit allongé vers les pôles, ou plus rare vers l'équateur, les nœuds seroient mûs en conséquence.

Cor. 22. Et réciproquement, par le mouvement des nœuds, on pourra connoître la forme du globe. S'il conserve toujours les mêmes pôles, & que le mouvement des nœuds se fasse en antécédence, la matière du globe sera protubérante vers l'équateur; & si ce mouvement se fait en conséquence, elle sera abaissée dans ses régions.

Supposez qu'un globe parfaitement sphérique, & d'une matière homogène, ait premièrement été en repos dans l'espace libre, & qu'ensuite il ait été poussé par une impulsion quelconque oblique à sa superficie, laquelle impulsion lui ait imprimé un mouvement en partie circulaire, & en partie en ligne droite; comme la forme de ce globe est la même par rapport à tous les axes qui passent par son centre, & qu'il n'a pas plus de tendance pour tourner autour de l'un de ces axes qu'autour d'un autre; il est clair, que par sa propre force il ne changera jamais ni son axe, ni l'inclinaison de cet axe. Supposez ensuite que ce globe reçoive une nouvelle impulsion quelconque oblique dans le même endroit de sa superficie dans laquelle il a reçu la première; comme cette nouvelle impulsion, soit qu'elle soit imprimée plutôt ou plus tard, a toujours les mêmes effets; il est clair, que ces deux impulsions successives produiront le même mouvement que si elles avoient été imprimées en même-temps, c'est-à-dire, que l'effet sera le même que si le globe avoit été poussé par une force simple composée de l'une & de l'autre, (*Corol. 2. des Loix.*) & que par conséquent cet effet sera un mouvement simple autour d'un axe donné d'inclinaison: il en est de même d'une seconde impulsion imprimée dans un autre lieu quelconque de l'équateur du premier mouvement, ainsi que de la première impulsion imprimée dans un lieu quelconque de l'équateur du mouvement que la seconde auroit produit sans la première; & enfin que de deux impulsions imprimées dans des lieux

quelconques ; les impulsions produiront le même mouvement circulaire que si elles avoient été imprimées à la fois dans le lieu de l'intersection des équateurs des mouvemens qu'elles auroient produit séparément.

Un globe homogène & parfaitement sphérique ne retient donc pas l'impression distincte de plusieurs mouvemens différens , mais de tous ces mouvemens divers il naît un mouvement unique , & le globe tend toujours , autant qu'il est en lui , à tourner d'un mouvement simple & uniforme autour d'un seul axe incliné d'une manière invariable , & la force centripète ne peut changer ni l'inclinaison de l'axe , ni la vitesse de la rotation. Car si on suppose le globe divisé en deux hémisphères par un plan quelconque qui passe par son centre & par le centre vers lequel la force est dirigée , cette force pressera également l'un & l'autre hémisphère , & par conséquent ce globe , quant au mouvement de rotation , n'inclinera vers aucun côté. Supposez à présent qu'on lui ajoute quelque part entre le pôle & l'équateur une matière nouvelle accumulée en forme de montagne , cette matière , par l'effort continuel qu'elle fera pour s'éloigner du centre de son mouvement , troublera le mouvement du globe , & fera que ses pôles changeront à tout moment de position , & qu'ils décriront perpétuellement des cercles autour d'eux mêmes & du point qui leur est opposé. Et on ne pourra empêcher l'énormité de cette vagation des pôles , qu'en plaçant cette montagne dans l'un ou l'autre pôle , auquel cas (Cor. 21.) les nœuds de l'équateur avanceront ; ou dans l'équateur , & alors (Cor. 21.) les nœuds rétrograderont ; ou enfin en ajoutant de l'autre côté de l'axe une matière nouvelle qui cause une libration à cette protubérance , & par ce moyen les nœuds avanceront ou rétrograderont , selon que cette protubérance & cette nouvelle matière seront plus proches des pôles ou de l'équateur.

PROPOSITION LXVII. THÉORÈME XXVII.

Le corps extérieur S décrit des aires plus proportionnelles au temps & un orbe plus approchant de la forme elliptique autour du centre de gravité O des corps intérieurs P & T ; qu'autour du corps le plus intérieur T.

LIVRE
PREMIER.

Fig. 122.

Car les attractions qui portent le corps *S* vers les corps *P* & *T* composent son attraction absolue, laquelle est dirigée avec plus de force vers le centre commun de gravité *O* de ces corps, que vers le plus grand corps *T* ; ainsi elle approche plus d'être réciproquement proportionnelle au carré de la distance *SO*, qu'au carré de la distance *ST*.

PROPOSITION LXVIII. THÉORÈME XXVIII.

Les mêmes loix d'attraction étant posées, le corps extérieur S décrira autour de O, commun centre de gravité des corps intérieurs P & T, des aires qui approcheront plus d'être proportionnelles au temps, & une orbite plus approchante de l'ellipse qui auroit ce même centre dans son foyer, si le corps le plus intérieur & le plus grand est attiré par ces corps de même qu'il les attire, que s'il n'étoit point attiré & qu'il fût en repos, ou qu'il fût plus ou moins agité en vertu d'une attraction plus ou moins forte.

Fig. 122.

Cette Proposition pourroit se démontrer à peu près de la même manière que la Proposition 66. mais il faudroit un raisonnement trop long que j'omettrai, il suffira de la traiter de la manière suivante.

Par la démonstration de la Proposition précédente, il est aisé de voir que le centre vers lequel le corps *S* est attiré par les forces réunies qui agissent sur lui, est près du centre commun de gravité des deux corps *P* & *T*. Si ce centre coïncidoit avec le centre commun de gravité de ces deux corps, & que le centre commun de gravité des trois corps fût en repos ; le corps *S* d'une part, & le commun centre de gravité des deux autres

corps de l'autre, décriraient autour de ce commun centre de gravité en repos des ellipses exactes, ce qui est clair par le Corollaire 2. de la Proposition 58. & par ce qui a été démontré dans les Propositions 64. & 65.

Fig. 122. Ce mouvement elliptique est un peu troublé à cause de la distance du centre de ces deux corps au centre vers lequel le troisième corps *S* est attiré. Si de plus le centre commun de ces trois corps se meut, cette perturbation sera encore plus grande, & par conséquent elle sera la moindre, lorsque le centre commun de gravité de ces trois corps sera en repos; c'est-à-dire, lorsque le corps le plus grand & le plus intérieur *T* sera attiré selon la même loi que les autres; & elle deviendra toujours de plus grande en plus grande, lorsque le commun centre de gravité de ces trois corps, commencera à se mouvoir par la diminution du mouvement du corps *T*, & que ce centre sera de plus en plus agité.

Cor. Il est aisé de tirer de là, que si plusieurs petits corps font leurs révolutions autour d'un plus grand, leurs orbites approcheront plus d'être des ellipses, & les aires qu'ils décriront seront plus égales, si tous ces corps s'attirent & s'agitent mutuellement par des forces accélératrices qui soient directement comme leurs forces absolues, & inversement comme les quarrés de leurs distances, & que le foyer d'une orbite quelconque soit placé dans le centre commun de gravité des corps intérieurs, (c'est-à-dire, le foyer de la première orbite intérieure, dans le centre de gravité du grand corps qui est le plus intérieur de tous; le foyer de la seconde orbite, dans le centre commun de gravité des deux corps les plus intérieurs, & celui de la troisième orbite, dans le centre commun de gravité des trois corps les plus intérieurs; & ainsi de suite,) que si le corps intérieur étoit en repos, & qu'il fût le foyer commun de toutes ces orbites.

PROPOSITION LXIX. THÉORÈME XXIX.

LIVRE
PREMIER.

Dans un système de plusieurs corps A, B, C, D, &c. Si un corps A attire tous les autres B, C, D, &c. par des forces accélératrices qui soient réciproquement comme les quarrés des distances au corps attirant ; & qu'un autre B attire aussi tous les autres A, C, D, &c. par des forces qui soient réciproquement comme les quarrés des distances au corps attirant : les forces absolues des corps attirans A & B l'un sur l'autre feront dans la même raison que ces corps.

Car à des distances égales les attractions accélératrices de tous les corps B, C, D, vers le corps A sont égales entr'elles, par l'hypothèse, & de même, les attractions accélératrices de tous ces corps vers B sont égales entr'elles à égales distances. Donc la force attractive absolue du corps A est à la force attractive absolue du corps B, comme l'attraction accélératrice de tous les corps vers A est à l'attraction accélératrice de tous les corps vers B à des distances égales ; & l'attraction accélératrice du corps B vers A est dans la même raison à l'attraction accélératrice du corps A vers B. Mais l'attraction accélératrice du corps B vers A est à l'attraction accélératrice du corps A vers B, comme la masse du corps A à la masse du corps B ; parce que les forces motrices, qui, par les définitions 2, 7 & 8, sont comme les forces accélératrices & les corps attirés conjointement, sont ici égales entr'elles, par la troisième loi du mouvement. Donc la force attractive absolue du corps A est à la force attractive absolue du corps B, comme la masse du corps A est à la masse du corps B.

Cor. 1. Donc si des corps A, B, C, D, &c. de ce système, chacun, étant considéré à part, attire tous les autres par des forces accélératrices qui soient réciproquement comme les quarrés des distances au corps attirant ; les forces absolues de tous ces corps feront entr'elles comme ces corps eux-mêmes.

Cor. 2. Et par le même raisonnement on prouvera, que si cha-

que corps A, B, C, D , &c. de ce système, étant considéré à part, attire tous les autres par des forces accélératrices, qui soient directement ou réciproquement en raison d'une puissance quelconque des distances au corps attirant, ou qu'elles dépendent d'une loi quelconque des distances à l'un des corps attirans; les forces absolues de tous ces corps, seront comme ces corps.

Cor. 3. Dans un système de corps dont les forces décroissent en raison doublée des distances, s'il arrive que les plus petits tournent autour du plus grand dans des ellipses exactes à très-peu de choses près, que leur foyer commun soit à peu près dans le centre de ce plus grand corps, & que ces petits corps décrivent autour du plus grand des aires presque proportionnelles au temps; les forces absolues de ces corps seront entr'elles exactement ou à peu près comme ces corps; & au contraire. Ce qui est clair par le Corol. de la Prop. 68. & le Corol. 1. de cette Proposition.

S C H O L I E.

De ces Propositions on doit passer tout de suite à l'analogie qui est entre les forces centripètes, & les corps centraux vers lesquels ces forces sont dirigées. Car il est vraisemblable que les forces qui sont dirigées vers des corps dépendent de leur nature & de leur quantité, ainsi qu'il arrive dans l'aiman. Dans tous les cas de cette espèce, on trouvera les attractions des corps, en assignant des forces à chacune de leurs parties, & en sommant toutes ces forces.

Je me fers ici du mot d'*attraction* pour exprimer d'une manière générale l'effort que font les corps pour s'approcher les uns des autres, soit que cet effort soit l'effet de l'action des corps, qui se cherchent mutuellement, ou qui s'agitent l'un l'autre par des émanations, soit qu'il soit produit par l'action de l'Ether, de l'air, ou de tel autre milieu qu'on voudra, corporel ou incorporel, qui pousse l'un vers l'autre d'une manière quelconque les corps qui y naissent,

l'emploie

J'emploie le mot d'*impulsion* dans le même sens général, ne recherchant point dans ce Traité l'espèce de ces forces ni leurs qualités physiques, mais leurs quantités & leurs proportions mathématiques, comme je l'ai déjà dit dans les définitions. C'est par les Mathématiques qu'on doit chercher les quantités de ces forces & leurs proportions qui suivent des conditions quelconques que l'on a posées : ensuite lorsqu'on descend à la Physique, on doit comparer ces proportions avec les Phénomènes ; afin de connoître quelles sont les loix des forces qui appartiennent à chaque genre de corps attirans, c'est alors qu'on peut examiner avec plus de certitude ces forces, leurs causes, & leurs explications physiques. Voyons maintenant quelles sont les forces avec lesquelles des corps sphériques, formés de parties qui attirent de la manière qu'on vient de dire, doivent agir l'un sur l'autre, & quels sont les mouvemens qui en doivent résulter.

DOUZIÈME SECTION.

Des forces attractives des corps sphériques.

PROPOSITION LXX. THÉORÈME XXX.

Un corpuscule placé dans l'intérieur d'une surface sphérique dont toutes les parties attirent en raison renversée du carré des distances, n'éprouve aucune attraction de cette superficie.

Soient $HIKL$ la surface sphérique, & P le corpuscule placé au dedans. En menant par P deux droites quelconques IPE , HPK , qui coupent dans un des cercles de cette sphere deux arcs infiniment petits HI , KL , il est clair (Corol. 3. Lem. VII.) que ces arcs seront proportionnels aux droites PH , PL , &

Fig. 123.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. 123.

que les petites parties de la surface de la sphere, qui seroient terminées de tous les côtés par des lignes telles que HK & IL menées par P , seroient comme les quarrés des mêmes droites PH , PL . Or delà il suit que les attractions de ces petites parties de la surface sphérique sur le corpuscule P sont égales. Car ces attractions doivent être en raison directe de ces particules, & en raison inverse du quarré des distances, & ces deux raisons composées ensemble en font une d'égalité.

Par le même raisonnement on verroit, que les attractions de toutes les parties de la sphere sur le même corpuscule P sont toujours égales aux attractions des parties opposées, & que par conséquent elles se détruisent réciproquement; c'est-à-dire, que ce corpuscule ne souffre aucune attraction de la surface sphérique.

C. Q. F. D.

PROPOSITION LXXI. THÉORÈME XXXI.

La même loi d'attraction étant posée, un corpuscule, placé au dehors de la surface sphérique, est attiré par cette surface en raison renversée du quarré de la distance de ce corpuscule au centre.

Fig. 124. & 125.

Soient $AHKB$, $ahkb$ deux superficies sphériques égales; S , s leurs centres; P , p deux corpuscules placés hors de ces spheres, chacun à une distance quelconque du centre. Soient de plus $PASB$, $pasb$ des droites tirées des corpuscules aux centres S & s ; PHK & PIL , phk & pil d'autres droites tirées par les mêmes corpuscules en telle sorte que les arcs HK & IL , hk & il soient respectivement égaux; SFD & SE , sfd & se les perpendiculaires abaissées des centres S & s sur les cordes HK & IL , hk & il ; IR & IQ , ir & iq les perpendiculaires abaissées de I sur PK & sur PB , & de i sur pk & sur pb . Enfin soit supposé que les angles DPE , dpe s'évanouissent, ce qui, à cause de l'égalité de DS & de ds , de ES & de es , permet de regarder les lignes PE & PF , pe & pf , DF & df comme égales.

Cela posé, on aura $PI : PF :: RI : DF$ & $pf : pi :: df$ ou $DF : ri$, ce qui donnera $PI \times pf : PF \times pi :: RI : ri$ ou (Cor. 3. Lem. VII.) $:: IH : ih$. De plus, $PI : PS :: IQ : SE$ & $ps : pi :: se$ ou $SE : iq$ & par conséquent, $PI \times ps : PS \times pi :: IQ : iq$. Delà on tire $PI^2 \times pf \times ps : pi^2 \times PF \times PS :: IQ \times HI : ih \times iq$. C'est-à-dire, que la petite surface sphérique produite par la révolution de HI autour de PS est à la petite surface sphérique produite par la révolution de hi autour de ps , comme $PI^2 \times pf \times ps$ à $pi^2 \times PF \times PS$. Mais les forces avec lesquelles ces petites surfaces tirent vers elles les corpuscules P & p sont (par hypothèse) comme ces surfaces directement, & comme les quarrés des distances PI & pi inversement, donc ces forces sont comme $pf \times ps$ à $PF \times PS$.

En décomposant présentement ces forces, par le Corol. 2. des loix, pour avoir les parties qui en résultent dans le sens des diamètres PS , ps il est clair, que les forces résultantes dans cette direction seront aux forces totales comme PS à PF & comme ps à pf . Donc la force suivant PS de la petite surface produite par HI fera à la force suivant ps de la petite surface produite par hi , comme $pf \times ps \times \frac{PF}{PS}$ à $PF \times PS \times \frac{pf}{ps}$, c'est-à-dire, en raison renversée des quarrés des distances PS , ps . Or on trouveroit la même chose pour toutes les autres petites surfaces dont les deux superficies sphériques sont composées: Donc les attractions entières de ces deux superficies sur les corpuscules P & p sont entr'elles en raison renversée des quarrés des distances de ces corpuscules aux centres. C. Q. F. D.

PROPOSITION LXXII. THÉORÈME XXXII.

Si toutes les parties d'une sphere homogene attirent en raison renversée du quarré des distances ; & qu'on suppose donnés , tant la densité de cette sphere , que le rapport du rayon de cette sphere

à la distance du corpuscule qu'elle attire, l'attraction exercée sur ce corpuscule sera proportionnelle au rayon de la sphere.

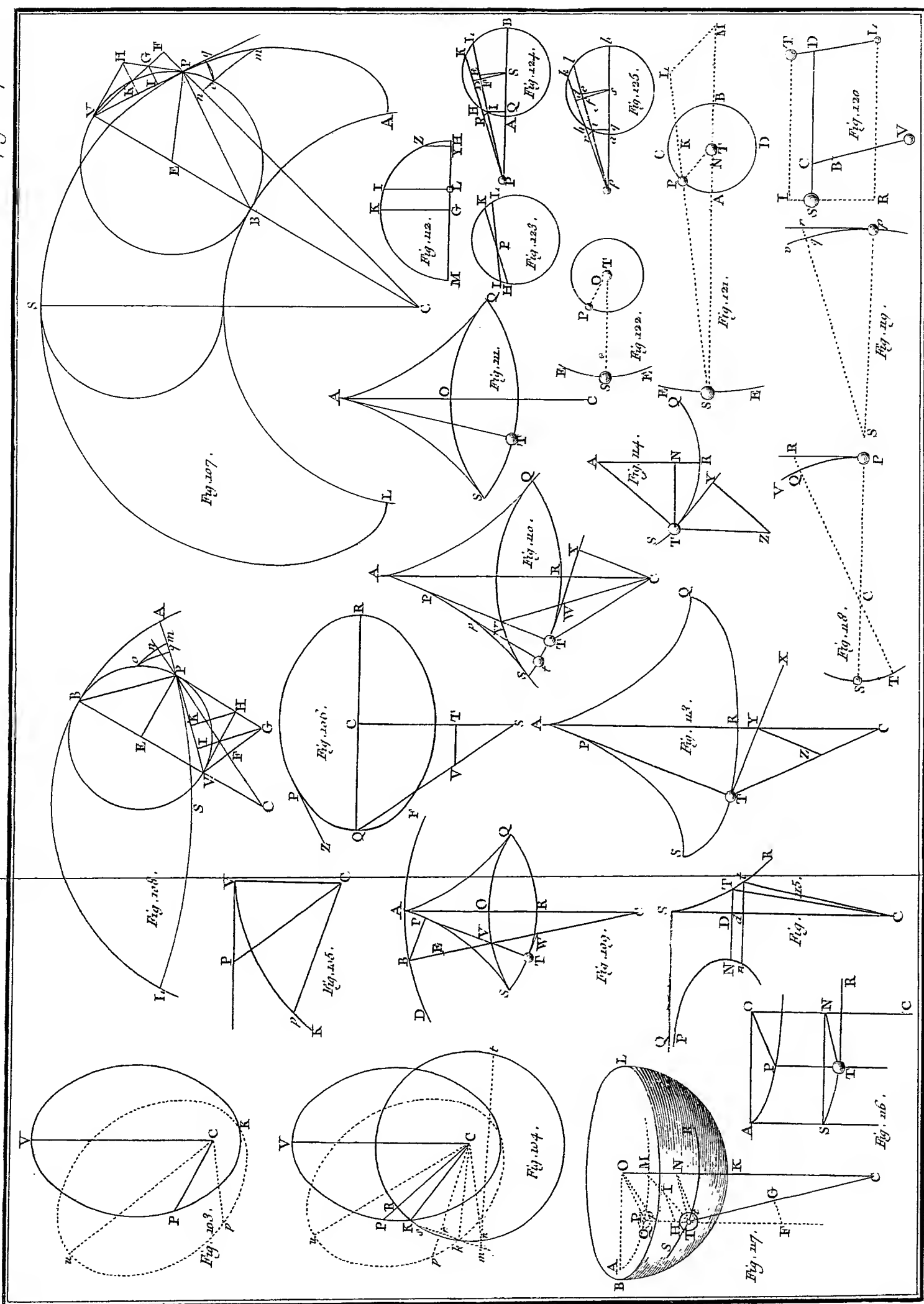
Qu'on se représente deux spheres & deux corpuscules placés à des distances de leurs centres respectivement proportionnelles aux rayons de ces spheres. Qu'on imagine ensuite ces deux spheres composées d'une infinité de particules respectivement semblables & semblablement posées par rapport aux corpuscules. Il est clair, que les attractions que chacun de ces corpuscules souffrira de la part de toutes les particules de la sphere attirante, seront en raison composée de toutes ces particules directement, & de tous les quarrés de leur distance inversement. Mais toutes ces particules étant semblables & semblablement placées, elles seront comme les cubes des rayons, & les quarrés des distances des corpuscules à chaque particule sont comme les quarrés de ces mêmes rayons; donc toutes les attractions de ces particules seront seulement comme les rayons; donc les attractions de ces deux spheres seront dans cette même raison.

C. Q. F. D.

Cor. 1. Si deux corpuscules, se mouvant autour de deux spheres de même matière attractive, décrivent chacun un orbite circulaire, & que les rayons de ces orbites soient proportionnels aux rayons des spheres attirantes, les temps périodiques seront égaux.

Cor. 2. Et réciproquement, si les temps périodiques sont égaux, les distances des corpuscules seront proportionnelles aux rayons des spheres. Ces deux Corollaires sont évidens par le Corol. 3. de la Prop. 4.

Cor. 3. Deux solides quelconques semblables & homogenes, étant composés de parties qui attirent en raison renversée des quarrés des distances, exercent sur deux corpuscules, placés semblablement par rapport à eux, des forces qui sont dans la raison directe de leurs dimensions semblables.



PROPOSITION LXXIII. THÉORÈME XXXIII.

LIVRE
PREMIER.

Un corpuscule, placé dans l'intérieur d'une sphere dont les parties attirent en raison renversée du carré des distances, tend vers le centre de cette sphere avec une force proportionnelle à la simple distance.

Que $ACBD$ soit la sphere attirante, P le corpuscule placé dans son intérieur, S le centre de cette sphere, & $PEQF$ la sphere décrite du même centre S & du rayon PS . Il est clair, par la Proposition 70, que toutes les surfaces sphériques comprises entre $ACBD$, & $EPFQ$ n'exercent aucune attraction sur le corpuscule P , & que par conséquent la seule sphere intérieure $PEQF$ agit sur ce corpuscule. Mais l'attraction de cette sphere est par la Proposition 72. comme la distance PS . Donc, &c. $C. Q. F. D.$

Fig. 126.

S C H O L I E.

Les superficies que je suppose ici former un solide par leur assemblage ne sont pas des superficies purement mathématiques, ce sont des orbes dont l'épaisseur est si petite, qu'on la peut regarder comme nulle, c'est-à-dire, les orbes évanouissantes qui composent une sphere lorsque leur nombre & leur ténuité sont augmentés à l'infini. J'entends de même par les points qui composent les lignes, les superficies, & les solides, des particules de ces quantités dont l'étendue est si petite, qu'on peut les négliger.

PROPOSITION LXXIV. THÉORÈME XXXIV.

Les mêmes choses que dans les Propositions précédentes étant posées, un corpuscule placé hors d'une sphere, est attiré vers le centre de cette sphere par une force réciproquement proportionnelle au carré de sa distance à ce centre.

Car si on suppose que cette sphere soit partagée en une infinité de surfaces sphériques qui aient le même centre qu'elle, toutes ces surfaces exerceront sur le corpuscule extérieur une

attraction qui sera , suivant la Prop. 71. dans la raison renversée du carré de la distance du corpuscule au centre. Ajoutant donc toutes ces attractions , la somme totale ou l'attraction de la sphere sera dans la même raison. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Delà il suit, qu'à des distances égales , les attractions des spheres de même densité seront comme ces spheres. Car , par la Prop. 72. deux spheres exercent à des distances proportionnelles à leurs rayons des forces aussi proportionnelles à ces rayons. Si on diminue ensuite la plus grande de ces deux distances dans la raison qu'ont entr'eux les rayons des deux spheres , cette distance deviendra par ce moyen égale à l'autre , & l'attraction sera à ce qu'elle étoit d'abord dans la raison du carré du rayon de la plus grande sphere au carré du rayon de la plus petite. Mais cette attraction étoit déjà à l'attraction vers l'autre sphere dans la raison simple des mêmes rayons ; donc elle sera alors comme les cubes de ces rayons , c'est-à-dire , comme les spheres.

Cor. 2. A des distances quelconques , les attractions seront en raison directe des spheres , & inverse des carrés des distances.

Cor. 3. Si un corpuscule est placé hors d'une sphere dont toutes les parties sont supposées avoir des forces attractives , & qu'on ait remarqué que l'attraction de ce corpuscule vers la sphere entiere soit en raison inverse du carré des distances au centre , les attractions de toutes les particules de la sphere seront aussi en raison renversée des carrés de leurs distances au corpuscule attiré.

PROPOSITION LXXV. THÉORÈME XXXV.

Si à tous les points d'une sphere donnée tendent des forces centripetes égales , qui décroissent en raison doublée des distances à ces points , cette sphere exercera sur une autre sphere quelconque composée de parties homogènes entr'elles une attraction qui sera en raison renversée du carré des distances de leurs centres.

Car l'attraction d'une particule quelconque de la sphere attirée

est en raison renversée du carré de la distance au centre de la sphere attirante par la Prop. 74. & elle est par conséquent la même qu'elle seroit si toute la sphere attirante étoit réduite à un corpuscule placé dans son centre. Mais l'action de ce corpuscule auquel on suppose réduite la sphere attirante, doit être la même sur la sphere attirée qu'elle seroit, si au lieu d'agir sur cette sphere attirée, il éprouvoit au contraire vers les parties de cette sphere des forces égales à celles avec lesquelles il les attire ; & la somme des forces avec lesquelles il seroit attiré par cette sphere, seroit, par la Proposition 74. en raison inverse du carré de la distance au centre. Donc l'attraction du corpuscule, ou, ce qui revient au même, celle de la sphere attirante sur la sphere attirée, est réciproquement proportionnelle au carré de la distance des centres de ces spheres.

Cor. 1. Les attractions des spheres vers d'autres spheres homogenes sont comme les spheres attirantes directement, & comme les carrés des distances des centres inversement.

Cor. 2. Il en est de même lorsque la sphere attirée attire aussi. Car chaque point de cette sphere attire les points de l'autre avec la même force avec laquelle il en est réciproquement attiré. Si donc dans toute attraction le point attirant éprouve la même action que le point attiré, il en naîtra une action mutuelle double, proportions gardées.

Cor. 3. Tout ce qui a été dit ci-dessus du mouvement des corps dans des sections coniques autour des foyers a lieu, si on place dans ces foyers les centres des spheres attirantes.

Cor. 4. Et tout ce qui concerne le mouvement dans des sections autour du centre de ces courbes peut s'appliquer aux mouvemens qui se font dans l'intérieur d'une sphere.

PROPOSITION LXXVI. THÉORÈME XXXVI.

Deux spheres dont toutes les parties agissent en raison renversée du carré des distances, étant composées l'une & l'autre d'orbes concen-

triques dont les densités du centre à la circonférence varient suivant une loi quelconque, s'attirent réciproquement avec des forces qui sont en raison renversée du quarré des distances de leurs centres.

Soient AB , CD , EF , &c. tant de sphères concentriques homogenes qu'on voudra, dont les intérieures étant ajoutées aux extérieures, ou en étant retranchées forment une sphere totale AB composée de couches plus ou moins denses vers le centre qu'à la circonférence. Soient ensuite GH , IK , LM , &c. d'autres sphères homogenes concentriques dont l'addition ou la soustraction forment pareillement une sphere GH hétérogene du centre à la circonférence. Par la Prop. 75. une quelconque des sphères homogènes AB ou CD , &c. & une quelconque des sphères homogènes GH , IK , &c. s'attireront réciproquement avec une force qui est en raison renversée du quarré de SP . Donc les attractions réciproques des sphères totales hétérogènes AB , GH qui sont produites par les sommes ou par les différences des attractions des sphères homogenes, seront aussi en raison renversée du quarré de SP .

Qu'on suppose présentement que le nombre de toutes ces sphères homogenes, dont l'addition ou la soustraction forment les sphères hétérogènes, soit augmenté jusqu'à l'infini, on pourra donner à ces sphères hétérogènes une loi quelconque de densité du centre à la circonférence, & leur attraction réciproque demeurera toujours en raison renversée du quarré de la distance SP . *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Si on a plusieurs sphères composées ainsi d'orbes de différentes densités, l'attraction accélératrice de l'une quelconque de ces sphères vers une autre quelconque, à même distance, fera comme la sphere attirante.

Cor. 2. Et à distance inégale, elle fera comme cette sphere divisée par le quarré de la distance.

Cor. 3. Mais l'attraction motrice, à distance égale, sera comme le produit de la sphere attirée par la sphere attirante.

Cor. 4.

Cor. 4. Et à distance inégale, comme ce produit divisé par le quarré de la distance.

LIVRE
PREMIER.

Cor. 5. Il en est de même lorsque l'attraction vient de la force attractive mutuelle de chaque sphere l'une vers l'autre, car de ces deux attractions il s'en forme une seule égale à leur somme.

Cor. 6. Lorsque l'on comparera les révolutions que des spheres entierement semblables, formées, suivant la même loi, ainsi d'orbes de différentes densités, font les unes autour des autres, on trouvera que si les distances de celles qui tournent à celles qui sont fixes, sont proportionnelles aux rayons de ces spheres fixes, les temps périodiques seront égaux.

Cor. 7. Et réciproquement si les temps périodiques sont égaux, les distances seront proportionnelles à ces rayons.

Cor. 8. Tout ce qu'on a démontré ci-dessus du mouvement des corps autour des foyers des sections coniques a lieu, lorsque la sphere attirante, formée ainsi d'orbes de différentes densités, est placée au foyer.

Cor. 9. Et il en est de même lorsque le corps qui décrit la trajectoire est aussi une sphere attirante formée d'orbes de différentes densités.

PROPOSITION LXXVII. THÉORÈME XXXVII.

Si toutes les parties des spheres attirent avec des forces qui soient comme les distances, la force composée par laquelle deux spheres s'attirent mutuellement est comme la distance qui sépare les centres de ces spheres.

Cas. 1. Soient $AEBF$ une sphere, S son centre, P un corpuscule qu'elle attire, $PASB$ l'axe de la sphere passant par le centre du corpuscule, EF , ef deux sections de la sphere faites par des plans qui coupent l'axe perpendiculairement à des distances égales SG , sg du centre; soit de plus H un point quelconque du plan EF . Il est clair, que la force centripete du point H sur le corpuscule P suivant la ligne PH , sera comme

Fig. 128.

la distance PH ; & que par le Cor. 2. des loix, cette force décomposée suivant PG , c'est-à-dire, la force vers le centre S , sera comme la droite PG . Donc la force de tous les points du plan EF , c'est-à-dire, la force totale de ce plan, par laquelle le corpuscule P est attiré vers le centre S , est comme la distance PG multipliée par le nombre des points, c'est-à-dire, comme le solide formé par ce même plan EF , & cette droite PG . Par la même raison, la force du plan ef par laquelle le corpuscule P est attiré vers le centre S sera comme ce plan multiplié par la distance Pg , ou comme le plan EF égal au plan ef multiplié par cette même distance Pg , d'où il suit, que la somme des forces de l'un & de l'autre plan sera comme le plan EF multiplié par la somme des distances $PG + Pg$, c'est-à-dire, comme ce plan multiplié par le double de la distance PS qui est entre le centre & le corpuscule, ou, ce qui revient au même, comme la somme des plans égaux $EF + ef$ multipliée par cette même distance; & comme il en seroit de même des forces de tous les plans qu'on peut imaginer de chaque côté du centre de la sphere, & également distans de ce centre, la somme de toutes ces forces, c'est-à-dire, celle de la sphere entiere sur le corpuscule, sera comme cette sphere multipliée par la distance SP . *C. Q. F. D.*

Cas. 2. Si on suppose que le corpuscule P attire la sphere $AEBF$, on prouvera par le même raisonnement qu'il exercera sur cette sphere une force proportionnelle à la distance PS . *C. Q. F. D.*

Cas. 3. Qu'on imagine présentement en P une autre sphere composée d'une infinité de corpuscules P . De ce que la force, par laquelle un corpuscule unique est attiré, est en raison composée de la solidité de la premiere sphere, & de la distance du corpuscule à son centre, & de ce que cette force est par conséquent la même que si elle émanoit toute d'un corpuscule unique placé au centre de la premiere sphere : il suit que la force

entière par laquelle sont attirés tous les corpuscules de la seconde sphere, c'est-à-dire, la force par laquelle la seconde sphere entière est attirée, fera la même qu'elle seroit, si toute cette sphere étoit attirée par un corpuscule unique placé au centre de la première sphere : & par conséquent, par le cas 2, cette force sera proportionnelle à la distance entre les centres des deux spheres. *C. Q. F. D.*

Cas. 4. Et si on suppose que ces spheres s'attirent mutuellement, leurs forces réunies conserveront la même proportion. *C. Q. F. D.*

Cas. 5. Que le corpuscule p soit placé maintenant au-dedans de la sphere $AEBF$, parce que la force du plan ef sur ce corpuscule est comme le solide formé par ce plan & la distance pg ; & que la force contraire du plan EF est comme le solide formé par ce même plan & la distance pG ; la force composée des deux sera comme la différence de ces solides, c'est-à-dire, comme la somme des plans égaux multipliée par la moitié de la différence des distances, c'est-à-dire, comme cette somme multipliée par la distance pS du corpuscule au centre de la sphere. Or, comme il en seroit de même de l'attraction de tous les plans EF , ef qu'on peut imaginer dans la sphere entière, c'est-à-dire, de l'attraction de toute la sphere, cette attraction doit donc être le produit de la somme de tous ces plans, ou de la sphere totale par la distance pS . *C. Q. F. D.*

Cas 6. Et si on s'imagine une nouvelle sphere composée d'un nombre innombrable de corpuscules p , & placée au dedans de la première sphere $AEBF$; on prouvera, comme ci-dessus, que l'attraction sera comme la distance pS des centres, soit que l'on considère l'attraction seule d'une sphere sur l'autre, soit que l'on considère l'attraction mutuelle des deux spheres l'une sur l'autre. *C. Q. F. D.*

LIVRE
PREMIER.

Fig. 128.

Fig. 129.

PROPOSITION LXXVIII. THÉORÈME XXXVIII.

Deux sphères, composées chacune d'orbes dont les densités varient du centre à la circonférence suivant une loi quelconque, étant formées l'une & l'autre d'une matière dont toutes les parties attirent en raison directe des distances, exercent l'une sur l'autre des forces proportionnelles à la distance de leurs centres.

Cette Proposition suit de la précédente de la même manière que la Proposition 76. suit de la Proposition 75.

Cor. Tout ce qui a été démontré ci-dessus dans les Propositions 10 & 64 du mouvement des corps autour des centres des sections coniques a lieu, lorsque les corps attirans & les corps attirés ont les conditions qu'on suppose dans cette Proposition.

S C H O L I E.

J'ai expliqué les deux principaux cas des attractions, celui où les forces centripètes décroissent en raison doublée des distances, & celui où elles croissent dans la raison simple des distances. Dans l'un & l'autre cas, les révolutions des corps se font dans des sections coniques, & les forces centripètes des particules qui composent les corps sphériques croissent ou décroissent en s'éloignant du centre, selon la même loi que la force centripète des corps entiers, ce qui est digne de remarque.

Les autres cas qui donnent des conclusions moins élégantes seroient trop longs à parcourir chacun en particulier : je vais les donner tous par une méthode générale.

L E M M E X X I X.

Si on décrit du centre S un cercle quelconque AEB, & du centre P deux cercles EF, cf, qui coupent, tant le premier en E & en e, que la ligne PS en F & en f, qu'on abaisse de plus ED, ed perpendiculaires sur PS ; je dis, que lorsque la distance des arcs EF, cf diminue à l'infini, la dernière raison de la ligne éva-

Fig. 130.

nouissante Dd à la ligne évanouissante Ff est la même que celle de la ligne PE à la ligne PS.

LIVRE
PREMIER.

Car en prolongeant la droite Ee qui coïncide avec l'arc évanouissant Ee jusqu'à ce qu'elle rencontre la droite PS en T ; & abaissant du point S la perpendiculaire SG sur PE , on aura (à cause des triangles semblables DTE , dTe , DES ;) $Dd : Ee :: DT : TE$, ou $:: DE : ES$; & en supposant que q soit la rencontre de Pe & de l'arc EF , les triangles Eeq , ESG seront semblables par le Lemme 8. & par le Cor. 3. du Lemme 7. ils donneront $Ee : eq$ ou $Ff :: ES : SG$; & $Dd : Ff :: DE : SG$, c'est-à-dire, (à cause des triangles semblables PDE , PGS) $:: PE : PS$. C. Q. F. D.

Fig. 130.

PROPOSITION LXXIX. THÉORÈME XXXIX.

Si la superficie EF, fe, dont la largeur est supposée évanouissante, tourne autour de l'axe PS, & que chacune des particules du solide produit par cette révolution attire le corpuscule P avec une force égale, la force entière avec laquelle ce solide attirera le corpuscule P vers S sera en raison composée du solide $DE^2 \times Ff$, & de la force avec laquelle une particule donnée & placée dans un lieu Ff attireroit ce même corpuscule.

Fig. 131.

N'examinant d'abord que la force de la superficie sphérique FE , produite par la circonvolution de l'arc FE , on verra, par ce qu'a enseigné Archimede dans son *Traité de la Sphere & du Cylindre*, que la partie annulaire de cette superficie, produite par la révolution du petit arc Er dont l'extrémité r est la rencontre de ed & de EF , doit être proportionnelle à Dd , le rayon PE demeurant constant; & la force de cette superficie, exercée suivant les lignes PE , devant être comme cette superficie annulaire, sera aussi comme Dd , ou, ce qui est la même chose, comme le rectangle sous PE & Dd ; mais cette même force exercée suivant la ligne PS qui tend au centre S sera moindre dans la raison de PD à PE : donc la force dans cette

Fig. 131.

direction sera proportionnelle à $PD \times Dd$. Et si on suppose que la ligne DF soit divisée en un nombre innombrable de parties égales telles que Dd , & que la superficie FE soit divisée en même temps en autant d'anneaux égaux par les plans élevés perpendiculairement du point D , il est clair, que la somme des forces de tous ces anneaux sera comme la somme de tous les $PD \times Dd$, c'est-à-dire, comme $\frac{1}{2}PF^2 - \frac{1}{2}PD^2$, & par conséquent comme DE^2 .

Connoissant ainsi l'attraction de la superficie FE , celle du solide $FEfe$ sera connue aussi : il ne faudra pour l'avoir que multiplier la première par Ff , c'est-à-dire, que cette attraction deviendra proportionnelle à $DE^2 \times Ff$, si la force qu'une particule donnée Ff exerce sur le corpuscule P à la distance PF est donnée. Mais si cette force n'est pas donnée, la force du solide $EFfe$ sera comme le solide $ED^2 \times Ff$ & cette force qui n'est pas donnée conjointement.

PROPOSITION LXXX. THÉORÈME XL.

Fig. 132. *ABE étant une sphere homogene dont le centre est S, & dont toutes les parties attirent suivant une loi quelconque des distances, & P un corpuscule placé sur l'axe AB de cette sphere, la force avec laquelle ce corpuscule sera attiré par toute la sphere, sera proportionnelle à l'aire ABN d'une courbe ANB dont les ordonnées DN correspondantes aux ordonnées DE du cercle SEB sont prises en raison composée de la force qu'exerce sur P la particule placée en E, & du solide $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$.*

Conservant les constructions du dernier Lemme & du dernier Théorème, concevez l'axe AB de la sphere divisé en un nombre innombrable de particules égales Dd , & toute la sphere divisée en autant de petites lames sphériques $EFfe$; & par le point n élevez l'ordonnée dn à la courbe ANB , il est clair, par le Théorème précédent, que la force avec laquelle la petite

lame $EFfe$ attire le corpuscule P , est en raison composée de $DE^2 \times Ff$ & de la force qu'une particule exerce à la distance PE .

Mais par le dernier Lemme $Dd : Ff :: PE : PS$, ce qui donne

$$Ff = \frac{PS \times Dd}{PE}; \text{ \& } DE^2 \times Ff = Dd \times \frac{DE^2 \times PS}{PE}. \text{ Donc}$$

la force de la petite lame $EFfe$ est en raison composée de

$$Dd \times \frac{DE^2 \times PS}{PE} \text{ \& de la force qu'une particule exerce à la}$$

distance PF , c'est-à-dire, par la construction de la courbe ANB , comme $DN \times Dd$ ou comme l'aire évanouissante $DNn d$.

Donc les forces de toutes les petites lames de même espèce, ou, ce qui revient au même, la force de la sphère entière sur le corpuscule P est comme l'aire totale ANB .

Cor. 1. Delà, si la force centripète qui tend à chaque particule est toujours la même quelle que soit la distance, & qu'on suppose DN proportionnelle à $\frac{DE^2 \times PS}{PE}$, la force totale par laquelle le corpuscule P sera attiré par la sphère sera comme l'aire ANB .

Cor. 2. Si la force centripète des particules est réciproquement comme la distance du corpuscule qu'elles attirent, & qu'on fasse DN proportionnelle à $\frac{DE^2 \times PS}{PE^2}$, la force par laquelle le corpuscule P sera attiré par toute la sphère, sera comme l'aire ANB .

Cor. 3. Si la force centripète des particules est réciproquement comme le cube de la distance du corpuscule qu'elles attirent, & qu'on fasse DN proportionnelle à $\frac{DE^2 \times PS}{PE^3}$; la force par laquelle le corpuscule sera attiré par toute la sphère sera comme l'aire ANB .

Cor. 4. Et généralement, si on suppose que la force centripète, qui tend vers chaque particule de la sphère, soit réciproquement comme la quantité V , & qu'on prenne DN proportionnelle à

Fig. 132.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS. $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$; la force, par laquelle le corpuscule sera attiré par toute la sphère, sera comme l'aire ANB .

PROPOSITION LXXXI. PROBLÈME XLI.

Fig. 133. *Les mêmes choses étant posées, on demande la valeur de l'aire ANB .*

Ayant tiré du point P la droite PH qui touche la sphère en H , & ayant abaissé la perpendiculaire HI sur l'axe PAB , on coupera PI en deux parties égales au point L , & on aura $PE^2 = PS^2 + SE^2 + 2PS \times SD$; mais SE^2 ou SH^2 est égal au rectangle $PS \times SI$ à cause des triangles semblables SPH , SHI : donc $PE^2 = PS \times \overline{PS + SI + 2SD}$, c'est-à-dire, $= PS \times 2SL \times 2SD = PS \times 2LD$. De plus $DE^2 = SE^2 - SD^2 = SE^2 - LS^2 + 2LS \times LD - LD^2$ ou enfin $= 2SL \times LD - LD^2 - AL \times LB$, à cause que $LS^2 - SE^2$ ou $LS^2 - SA^2$ est égal au rectangle $AL \times LB$. Ecrivant donc $2SL \times LD - LD^2 - AL \times LB$ au lieu de DE^2 ; la quantité $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$ (laquelle, selon le Corol. 4. de la Prop. précédente, est comme la longueur de l'ordonnée DN) se décomposera dans les trois parties $\frac{2SL \times LD \times PS}{PE \times V} - \frac{LD^2 \times PS}{PE \times V} - \frac{AL \times LB \times PS}{PE \times V}$; & si dans ces trois parties on écrit au lieu de V la quantité qui exprime la force centripète d'une particule en E sur le corpuscule P , & au lieu de PE la moyenne proportionnelle entre PS & $2LD$; on aura les ordonnées d'autant de courbes, dont on connoîtra les aires par les méthodes ordinaires. C. Q. F. F.

Exemple 1. Si la force centripète tendante à chacune des particules de la sphère est réciproquement comme la distance, écrivez PE au lieu de V & ensuite $2PS \times LD$ au lieu de PE^2 , & vous aurez DN proportionnelle à $SL - \frac{1}{2}LD - \frac{AL \times LB}{2LD}$.

Supposez que DN soit égale au double $2SL - DL - \frac{AL \times LB}{LD}$
de

de cette quantité : la partie donnée $2SL$ de cette ordonnée servant d'ordonnée elle-même, AD servant d'abscisse, donnera pour la première aire le rectangle $2SL \times AB$; la seconde partie variable LD servant d'ordonnée pour la même abscisse AD donnera pour la seconde aire $\frac{LB^2 - LA^2}{2}$ ou $SL \times AB$; qui étant soustraite de la première aire $2SL \times AB$ donnera l'aire $SL \times AB$. La troisième partie $\frac{AL \times LB}{LD}$ variable aussi, donnera pour la troisième aire, une aire hyperbolique, laquelle étant soustraite de l'aire $SL \times AB$ donnera pour reste l'aire cherchée ANB d'où l'on tire la construction suivante du Problème.

Aux points L, A, B élevez les perpendiculaires Ll, Aa, Bb , desquelles $Aa = LB$ & $Bb = LA$. Décrivez ensuite par les points ab l'hyperbole ab dont les asymptotes soient Ll, LB , & la corde ba renfermera l'aire aba égale à l'aire cherchée ANB .

Exemple 2. Si la force centripète qui tend à chaque particule de la sphère, est réciproquement comme le cube de la distance, ou ce qui revient au même, comme le cube divisé par un plan quelconque donné ; écrivez alors $\frac{PE^3}{2AS^2}$ au lieu de V , & $2PS \times LD$ au lieu de PE^2 ; vous aurez par ce moyen DN proportionnelle à $\frac{SL \times AS^2}{PS \times LD} - \frac{AS^2}{2PS} - \frac{AL \times LB \times AS^2}{2PS \times LD^2}$, c'est-à-dire, (à cause que $\div PS, AS, SI$) proportionnelle à $\frac{SL \times SI}{LD}$

$- \frac{1}{2}SI - \frac{AL \times LB \times SI}{2LD^2}$. Faisant servir de même ces trois parties d'ordonnées pendant que AD sert d'abscisse, la première $\frac{LS \times SI}{LD}$ donnera l'aire d'une hyperbole ; la seconde $\frac{1}{2}SI$ donnera l'aire $\frac{1}{2}AB \times SI$; & la troisième $\frac{AL \times LB \times SI}{2LD^2}$ donnera l'aire $\frac{AL \times LB \times SI}{2LA} - \frac{AL \times LB \times SI}{2LB}$, c'est-à-dire, $\frac{1}{2}AB \times SI$.

 LIVRE
PREMIER.

Fig. 133.

Fig. 134.

soustrayant de la première la somme de la seconde &c de la troisième, il restera l'aire cherchée ANB , ce qui fournit cette construction.

Fig. 135. Elevez aux points L, A, S, B les perpendiculaires Ll, Aa, Ss, Bb , desquelles Ss soit égale à SI ; & décrivez par le point s l'hyperbole asb dont les asymptotes soient Ll, BL . Cette hyperbole coupera les lignes Aa, Bb aux points a & b , & donnera par ce moyen l'aire $AasbB$, de laquelle retranchant le rectangle $2AS \times SI$, on aura l'aire cherchée ANB .

Fig. 133. *Exemple 3.* Si la force centripète qui tend à chaque particule de la sphère décroît en raison quadruplée de la distance à ces

particules, écrivez $\frac{PE^4}{2AS^3}$ au lieu de V , & ensuite $\sqrt{2PS \times LD}$ au lieu de PE , par ce moyen DN deviendra proportionnelle à $\frac{SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{I}{\sqrt{LD}} - \frac{SI^2}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{I}{\sqrt{LD}} - \frac{SI^2 \times AL \times LB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{I}{\sqrt{LD}}$, dont les trois parties, servant toujours d'ordonnées tandis que AD sert d'abscisse, donneront les trois aires $\frac{2SI^2 \times SL}{\sqrt{2SI}} \times \frac{I}{\sqrt{LA}} - \frac{I}{\sqrt{LB}}; \frac{SI^2}{\sqrt{2SI}} \times \sqrt{LB - \sqrt{LA}};$ & $\frac{SI^2 \times AL \times LB}{2\sqrt{2SI}} \times \frac{I}{LA \times \sqrt{LA}} - \frac{I}{LB \times \sqrt{LB}}$ qui se réduisent aux trois quantités $\frac{2SI^2 \times SL}{LI}; SI^2$ & $SI^2 \times \frac{2SI}{3LI}$, de la première desquelles retranchant la somme des deux autres, il reste $\frac{4SI^3}{3LI}$; d'où l'on apprend que la force avec laquelle P est attiré par la sphère entière est proportionnelle à $\frac{SI^3}{PI}$, ou, ce qui revient au même, que cette force est en raison renversée de $PS^3 \times PI$. C. Q. F. T.

Par la même méthode on pourroit déterminer l'attraction d'un corpuscule placé au-dedans d'une sphère, mais on aura plus facilement cette attraction par le Théorème suivant.

PROPOSITION LXXXII. THÉORÈME XLI.

LIVRE
PREMIER.

Dans une sphere dont le centre est S & le rayon SA, si on prend SI, SA, SP continuellement proportionnelles, l'attraction d'un corpuscule placé dans un lieu quelconque I au dedans de cette sphere, sera à l'attraction d'un autre corpuscule placé hors de la sphere, dans le lieu P, en raison composée de la raison sousdoublée des distances IS, PS, du centre, & de la raison sousdoublée des forces avec lesquelles ces mêmes corpuscules P & I seroient attirés par une seule particule placée au centre de la sphere.

Fig. 136.

Si, par exemple, les forces centripetes des particules de la sphere sont réciproquement comme les distances du corpuscule qu'elle attire; la force par laquelle un corpuscule placé en *I* est attiré par toute la sphere, sera à la force par laquelle il seroit attiré s'il étoit placé en *P* en raison composée de la raison sousdoublée de la distance *SI* à la distance *SP*, & de la raison sousdoublée inverse des distances *SI*, *SP*; or comme ces deux raisons sousdoublées composent une raison d'égalité, les attractions exercées par la sphere entiere en *I* & en *P* sont égales.

Si les forces des particules de la sphere sont réciproquement en raison doublée des distances, on trouvera par le même calcul que l'attraction en *I* est à l'attraction en *P*, comme la distance *SP* au demi-diametre *SA* de la sphere.

Si les forces sont réciproquement en raison triplée des distances, les attractions en *I* & en *P* seront l'une à l'autre comme SP^2 à SA^2 .

Si elles sont en raison quadruplée, les attractions seront comme SP^3 à SA^3 . Ainsi comme l'attraction en *P* dans ce dernier cas a été trouvée réciproquement comme $PS^3 \times PI$, l'attraction en *I* sera réciproquement comme $SA^3 \times PI$, c'est-à-dire, (à cause que SA^3 est donnée) réciproquement comme PI , il en seroit de même des autres cas. Ce Théorème se démontre ainsi.

De la même maniere qu'on a vu dans la solution du Problème

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. 136.

précédent que lorsque le corpuscule placé en P donnoit l'ordonnée DN proportionnelle à la quantité $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times V}$, on verra en faisant le même usage de I que l'on a fait de P que cette ordonnée DN doit être dans ce cas proportionnelle à $\frac{DE^2 \times IS}{IE \times V}$, supposant donc que les forces centripètes, qui émanent d'un point quelconque E de la sphère, soient l'une à l'autre dans les distances IE , PE comme PE'' à IE'' , on trouvera que l'ordonnée DN que donneroit la supposition du corpuscule en P est à celle que donneroit la supposition du corpuscule en I dans le rapport des quantités $\frac{DE^2 \times PS}{PE \times PE''}$ & $\frac{DE^2 \times IS}{IE \times IE''}$, c'est-à-dire, dans le rapport de $PS \times IE \times IE''$, à $IS \times PE \times PE''$. Or, parce que les lignes SI , SE , SP sont en proportion continue, les triangles SPE , SIE sont semblables & donnent $IE : PE :: IS : SE$ ou SA . Ecrivant donc dans le rapport précédent des deux valeurs de DN la raison de IS à SA au lieu de celle de IE à PE , on aura le rapport de $PS \times IE''$ à $SA \times PE''$. Mais la raison de PS à SA est la raison fousdoublée des distances PS , SI ; & la raison de IE'' à PE'' (à cause de la proportion $IE : PE :: IS : SA$) est la raison fousdoublée des forces aux distances PS , IS . Donc les valeurs de DN dans les deux cas, & par conséquent les aires des courbes auxquelles elles appartiennent, ou, ce qui revient au même, les attractions des corpuscules en P & en I , sont en raison composée de ces raisons fousdoublées. C. Q. F. D.

PROPOSITION LXXXIII. PROBLÈME XLII.

Fig. 137. *Trouver la force par laquelle un corpuscule placé dans le centre d'une sphere est attiré vers un segment quelconque de cette sphere.*

Soit P le corpuscule placé au centre de la sphere, & $RBSD$ le segment qui l'attire. Soit de plus EFG une des surfaces sphériques quelconques décrites du centre P & du rayon PF , des-

quelles on peut supposer que le segment proposé est composé, en ne regardant pas ces surfaces comme purement mathématiques, mais comme ayant une épaisseur infiniment petite.

Nommant O cette petite épaisseur, il est clair, par ce qu'a démontré Archimède, que la surface ou orbe sphérique EFG fera proportionnelle à $PF \times DF \times O$, & par ce qui a été démontré dans la Proposition 79, si on suppose que les forces attractives des particules de la sphere, soient en raison renversée des puissances n des distances, l'attraction de cette orbe fera comme $\frac{DE^2 \times O}{PF^n}$, c'est-à-dire, comme $\frac{2 DF \times O}{PF^{n-2}} - \frac{DF^2 \times O}{PF^n}$. Prenant donc l'ordonnée FN proportionnelle à cette quantité, l'aire DB , de la courbe qu'on décrira par ce moyen, exprimera l'attraction cherchée du corpuscule P vers le segment proposé $RBSD$. C. Q. F. T.

LIVRE
PREMIER.

Fig. 137.

PROPOSITION LXXXIV. PROBLÈME XLIII.

Trouver la force par laquelle un corpuscule placé hors du centre de la sphere & sur l'axe d'un segment quelconque, est attiré par ce même segment.

Que le corps P soit attiré par le segment EBK dans l'axe ADB duquel il est placé. En décrivant du centre P & de l'intervalle PE la superficie sphérique EFK laquelle partage le segment proposé en deux parties $EBKFE$, $EFKDE$; on n'aura qu'à chercher la force de la première partie par la Proposition 81, & la force de la dernière par la Prop. 83; & la somme de ces forces fera la force totale du segment $EBKDE$. C. Q. F. T.

Fig. 138.

SCHOLIE.

Après avoir expliqué les attractions des corps sphériques, je devrois naturellement entrer dans le même détail sur les loix d'attraction des autres corps; mais il n'est pas nécessaire à mon dessein de les expliquer toutes en particulier: je me contenterai de donner quelques-unes des Propositions les plus générales sur

TREIZIÈME SECTION.

Des forces attractives des corps qui ne sont pas sphériques.

PROPOSITION LXXXV. THÉORÈME XLII.

Si l'attraction du corps attiré est beaucoup plus forte lorsqu'il est contigu au corps attirant, que lorsqu'il n'en est séparé que d'un très-petit intervalle : les forces des particules du corps attirant décroîtront dans une raison plus que doublée des distances à ces particules.

Les forces décroissant en raison doublée des distances, l'attraction vers une sphère, est par la Prop. 74. réciproquement comme le carré de la distance du corps attiré au centre de la sphère, & par conséquent elle augmentera à peine sensiblement dans le contact ; donc l'augmentation seroit encore moins remarquable si la force décroissoit dans une moindre raison. La Proposition à démontrer est donc claire quant aux sphères attractives : elle a lieu aussi dans les orbes sphériques concaves qui attirent des corps placés au-dehors ; & elle est encore plus évidente pour les corps placés dans l'intérieur des orbes sphériques qui les attirent, puisque les attractions exercées par les concavités des orbes sont détruites par des attractions contraires par la Prop. 70. & que par conséquent elles sont nulles dans le contact.

Si on suppose présentement que de ces sphères ou de ces orbes sphériques on ôte des parties quelconques éloignées du lieu du contact & qu'on leur ajoute de nouvelles parties dans d'autres endroits, on pourra changer à volonté la forme de ces corps sans que ces parties ajoutées ou retranchées, lesquelles

font éloignées du lieu du contact, augmentent sensiblement l'attraction de ces corps dans le contact. Donc la Proposition en question est vraie pour tous les corps, quelque soit leur forme. C. Q. F. D.

PROPOSITION LXXXVI. THÉORÈME XLIII.

Si les forces des particules qui composent un corps attirant décroissent en raison triplée ou plus que triplée des distances, l'attraction sera beaucoup plus forte dans le contact, que lorsque le corps attirant & le corps attiré ne seront séparés que d'un très-petit intervalle.

On a vu dans la solution du Problème 41. donnée dans les Exemples 2 & 3 ; que dans cette loi d'attraction lorsque le corpuscule attiré approche de la sphere qui l'attire, l'attraction augmente à l'infini. On conclura facilement la même chose (par ces exemples & par le Théorème 41.) des attractions des corps vers des orbes concaves convexes, soit que les corps attirés soient placés hors de ces orbes, soit qu'ils soient dans leur concavité. Or en ajoutant ou en ôtant à ces spheres & à ces orbes de la matière quelconque attractive placée où l'on voudra, pourvu que ce ne soit pas dans le lieu du contact, les corps attirans pourront avoir la forme qu'on voudra, & la proposition sera prouvée en général. C. Q. F. D.

PROPOSITION LXXXVII. THÉORÈME XLIV.

Si deux corps semblables entre eux, & formés d'une matière également attractive, attirent séparément des corpuscules qui leur soient proportionnels, & qui soient posés de même par rapport à eux, les attractions accélératrices des corpuscules vers les corps entiers seront comme leurs attractions accélératrices vers les particules de ces corps situées semblablement, & prises proportionnelles aux tous.

Car si ces corps sont divisés dans des particules qui soient proportionnelles aux corps entiers, & posées de même dans ces corps, les attractions vers chacune des particules du premier corps seront aux attractions vers chacune des particules correspon-

tes de l'autre corps, comme l'attraction vers une particule quelconque du premier corps est à l'attraction vers une particule correspondante de l'autre corps; & par conséquent l'attraction vers le premier corps entier, sera à l'attraction vers tout le second dans cette même raison. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc si les forces attractives des particules décroissent en raison d'une puissance quelconque des distances, les attractions accélératrices vers les corps entiers seront en raison renversée de ces puissances des distances, & en raison directe des masses attirantes.

Si, par exemple, les forces des particules décroissent en raison doublée des distances aux corpuscules attirés, que les corps attirans soient comme A^3 & B^3 & que par conséquent tant les racines cubes de ces corps, que leurs distances aux corpuscules attirés soient comme A & B , les attractions accélératrices vers les corps attirans seront comme $\frac{A^3}{A^2}$ & $\frac{B^3}{B^2}$, c'est-à-dire, comme les racines cubes A & B de ces corps.

Si les forces des particules décroissent en raison triplée des distances aux corpuscules attirés, les attractions accélératrices vers les corps entiers seront comme $\frac{A^3}{A^3}$ & $\frac{B^3}{B^3}$, c'est-à-dire, égales.

Si les forces décroissent en raison quadruplée, les attractions vers les corps seront comme $\frac{A^3}{A^4}$ & $\frac{B^3}{B^4}$, c'est-à-dire, réciproquement comme les racines cubes A & B ; & ainsi des autres.

Cor. 2. Et réciproquement, en connoissant les forces par lesquelles des corps semblables attirent des corpuscules semblablement placés, on pourra en conclure la loi des distances suivant laquelle agissent les particules attirantes, pourvu que cette loi dépende de quelque raison directe ou inverse des distances.

PROPOSITION

Si les forces attractives des particules égales d'un corps quelconque, sont comme les distances, la force qu'exercera le corps entier, tendra à son centre de gravité : & elle sera la même que celle d'un globe de même masse qui auroit son centre placé dans le centre de gravité de ce corps.

Que les particules A , B du corps $RSTV$ attirent un corpuscule Z avec des forces qui soient comme les distances AZ , BZ , si ces particules sont égales entr'elles ; & qui soient en raison composée de ces particules & de leurs distances AZ , BZ , si ces particules sont supposées inégales : que ces particules A & B soient jointes par la droite AB divisée en G , en sorte que AG soit à BG comme la particule B à la particule A , G sera le commun centre de gravité de ces particules. La force $A \times AZ$ de la particule A se décomposera (par le Corol. 2. des loix) dans les forces $A \times GZ$ & $A \times AG$, & la force $B \times BZ$ de la particule B se décomposera de même dans les forces $B \times GZ$ & $B \times GB$. Mais les forces $A \times AG$ & $B \times BG$, sont égales, à cause que $BG : AG :: A : B$; donc puisqu'elles tendent vers des côtés opposés, elles se détruisent mutuellement. Il reste donc les forces $A \times GZ$ & $B \times GZ$ lesquelles tendent de Z vers le centre G , & composent la force $\overline{A+B} \times GZ$; c'est-à-dire, la même force que si les particules attractives A & B étoient placées dans leur commun centre de gravité G , & qu'elles y composassent un globe.

Par le même raisonnement, si on ajoute une troisième particule C , & que sa force se compose avec la force $\overline{A+B} \times GZ$ qui tend au centre G , la force qui en résultera tendra au commun centre de gravité de ce globe, lequel globe est supposé en G , & de la particule C , c'est-à-dire, au commun centre de gravité des trois particules A , B , C ; & elle sera la même que si ces trois particules ne faisoient qu'un seul globe placé dans leur

Fig. 139.

commun centre de gravité, & ainsi des autres à l'infini. La force totale de toutes les particules d'un corps quelconque $RSTV$, est donc la même qu'elle seroit, si ce corps, en conservant le même centre de gravité, devenoit un globe. *C. Q. F. D.*

Fig. 139.

Cor. De là, le mouvement du corps attiré Z , sera le même que si le corps attirant $RSTV$ étoit sphérique, & par conséquent si ce corps attirant est en repos, où qu'il se meuve uniformément en ligne droite, le corps attiré décrira une ellipse dont le centre sera le centre de gravité du corps attirant.

PROPOSITION LXXXIX. THÉORÈME XLVI.

Si on a plusieurs corps formés de particules égales, & dont les forces soient comme les distances : la force composée des forces de tous ces corps, & par laquelle ils attireront un corpuscule quelconque, tendra au commun centre de gravité des corps attirans ; de plus cette force sera la même qu'elle seroit, si ces corps attirans en conservant leur commun centre de gravité, s'unissoient ensemble, & formoient un globe.

Cette Proposition se démontre de la même manière que la Proposition précédente.

Cor. Le mouvement du corps attiré sera donc le même, que si les corps attirans, en conservant leur commun centre de gravité, s'unissoient ensemble, & qu'il s'en formât un globe. Donc si le commun centre de gravité des corps attirans est en repos, ou se meut uniformément en ligne droite, le corps attiré décrira une ellipse autour de ce centre.

PROPOSITION XC. PROBLÈME XLIV.

Supposant qu'à chaque point d'un cercle quelconque, tendent des forces centripètes égales, & qui croissent ou décroissent dans une raison quelconque des distances, on demande la force par laquelle est attiré un corpuscule placé à volonté dans la ligne droite élevée sur le centre de ce cercle perpendiculairement à son plan.

Fig. 140.

Du centre A & d'un intervalle quelconque AD soit décrit un cercle dans le plan auquel la droite AP est perpendiculaire :

pour trouver la force par laquelle un corpuscule quelconque P est attiré vers ce cercle, on tirera d'un point quelconque E de ce cercle une ligne PE au corpuscule attiré P , on prendra ensuite sur la droite PA , $PF = PE$, & on tirera la perpendiculaire FK qui soit comme la force avec laquelle le point E attire le corpuscule P . On tracera la courbe IKL , lieu de tous les points K , & qui rencontre le plan du cercle en L , enfin on prendra sur PA , $PH = PD$, & on élèvera la perpendiculaire HI qui rencontrera la courbe, dont on vient de parler, en I ; alors l'attraction du corpuscule P vers le cercle sera comme l'aire $AHIL$ multipliée par la hauteur AP . C. Q. F. T.

Car si on prend sur AE la ligne infiniment petite Ee , qu'on tire Pe , & que sur PE & PA on prenne PC & Pf égales à Pe , la force avec laquelle un point quelconque E de l'anneau décrit du centre A & de l'intervalle AE , attire vers lui le corpuscule P étant supposée proportionnelle à FK , on trouvera que la force avec laquelle ce point attire le corps P vers A , est proportionnelle à $\frac{AP \times FK}{PE}$, & que la force avec laquelle tout

l'anneau attire le corps P vers A , est comme l'anneau, & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjointement; mais cet anneau est comme le rectangle formé par le rayon AE & la largeur Ee , & ce rectangle, (à cause des proportionnelles PE & AE , Ee & CE) est égal au rectangle $PE \times CE$ ou $PE \times Pf$; donc la force avec laquelle cet anneau attire le corps P vers A , sera comme $PE \times Pf$ & $\frac{AP \times FK}{PE}$ conjointement, c'est-à-dire, comme le produit $Ff \times FK \times AP$, ou comme l'aire $FKkf$ multipliée par AP . Et par conséquent la somme des forces avec lesquelles tous les anneaux contenus dans le cercle entier dont le rayon est AD attirent le corps P vers A , est comme l'aire totale $AHIKL$ multipliée par AP . C. Q. F. D.

Cor. 1. Si les forces décroissent en raison doublée des distances,

c'est-à-dire, si FK est proportionnelle à $\frac{1}{PF^2}$, & que par consé-

quent l'aire $AHIKL$ soit comme $\frac{1}{PA} - \frac{1}{PH}$; l'attraction du

Fig. 140. corpuscule P vers le cercle sera comme $1 - \frac{PA}{PH}$; c'est-à-dire,

comme $\frac{AH}{PH}$.

Cor. 2. Et généralement, si les forces aux distances D sont réciproquement comme une puissance quelconque D^n des distances, c'est-à-dire, si FK est proportionnelle à $\frac{1}{D^n}$, & que par

conséquent l'aire $AHIKL$ soit comme $\frac{1}{PA^{n-1}} - \frac{1}{PH^{n-1}}$;

l'attraction du corpuscule P vers le cercle sera comme $\frac{1}{PA^{n-1}}$

ou $\frac{PA}{PH^{n-1}}$.

Cor. 3. Si le diamètre du cercle est augmenté à l'infini, & que le nombre n soit plus grand que l'unité, l'attraction du corpuscule P vers le plan total infini, sera réciproquement comme PA^{n-1} , à cause que l'autre terme $\frac{PA}{PH^{n-1}}$ s'évanouira.

PROPOSITION XCI. PROBLÈME XLV.

Trouver l'attraction qu'un conoïde quelconque exerce sur un corpuscule placé dans l'axe de révolution, en supposant que les forces attractives des particules de ce solide décroissent dans une raison quelconque des distances.

Fig. 141. P étant le corpuscule donné & placé sur l'axe AB du conoïde $DECG$, & RFS le cercle qui est la tranche de ce conoïde par un plan quelconque perpendiculaire à l'axe soit prise, (par la Prop. 90.) la ligne FK proportionnelle à la force par laquelle le corpuscule P est attiré vers ce cercle, & soit tracée la courbe LKI lieu de tous les points K trouvés de la même manière;

l'aire $LABI$ exprimera l'attraction demandée du corpuscule P vers le solide $DECG$. *C. Q. F. T.*

Cor. 1. Si ce solide est un cylindre décrit par la révolution du rectangle $ADEB$ autour de l'axe AB ; & que les forces centripètes qui tendent à chacun de ces points soient réciproquement comme les quarrés des distances, l'attraction du corpuscule P vers ce cylindre fera comme $AB - PE + PD$. Car l'ordonnée FK , par le Corol. 1. de la Prop. 90. sera proportionnelle à $1 - \frac{PF}{PR}$.

Or la partie 1. de cette ordonnée donnera le rectangle $1 \times AB$ pour la première partie de l'aire $LABI$, & la seconde $\frac{PF}{PR}$,

étant supposée appliquée continuellement à l'abscisse AF , donnera une courbe dont les aires qui répondent à AP & à PB feront $1 \times \overline{PD - AD}$ & $1 \times \overline{PE - AD}$ & dont par conséquent l'aire répondant à AB fera $1 \times \overline{PE - PD}$; retranchant donc de $1 \times AB$ l'espace $1 \times \overline{PE - PD}$, on aura $1 \times \overline{AB - PE + PD}$ pour exprimer l'aire $LABI$ de l'attraction du cylindre $DGCE$.

Cor. 2. Il est aisé de connoître, par cette Proposition, la force avec laquelle le sphéroïde $AGBC$ attire un corps quelconque P placé au-dehors sur son axe AB . $NKRM$ étant une section conique dont l'ordonnée ER perpendiculaire sur PE est toujours égale à la ligne PD menée de P au point D dans lequel l'ordonnée coupe le sphéroïde. Soient élevées des sommets A, B du sphéroïde les perpendiculaires AK, BM à son axe AB , lesquelles soient respectivement égales à AP & à BP , & rencontrent par conséquent la section conique en K & en M ; & soit tiré KM qui retranche de cette section le segment $KMRK$. Si le plus grand demi diamètre du sphéroïde est SC , & que son centre soit S , la force avec laquelle le sphéroïde entier attire le corpuscule P fera à la force avec laquelle la sphere décrite sur le diamètre AB attire ce même corpuscule, comme $\frac{AS \times \overline{CS^2 - PS^2} \times \overline{KMRK}}{PS^2 + CS^2 - AS^2}$ à $\frac{AS^3}{PS^3}$, & on auroit de la même

LIVRE
PREMIER.

Fig. 142.

Fig. 143.

manière l'attraction d'un segment quelconque de ce sphéroïde.

Cor. 3. On peut tirer encore de la même Proposition que si le corpuscule est placé au-dedans du sphéroïde, sur son axe, l'attraction sera comme sa distance au centre. Mais on peut s'en assurer plus facilement de la manière suivante, soit que le corpuscule soit placé sur l'axe, soit qu'il le soit sur un autre diamètre quelconque donné.

Que $AGOF$ soit le sphéroïde attirant; S son centre; P le corps attiré; SPA un demi diamètre passant par P ; DE , FG deux droites quelconques qui traversent le sphéroïde, & passent par P ; PCM , HLN les superficies de deux sphéroïdes intérieurs, concentriques & semblables à l'extérieur, dont le premier passe par le corps P , & coupe les droites DE & FG en B & C , & dont le dernier coupe les mêmes droites en H , I & K , L .

Supposant que tous ces sphéroïdes aient un axe commun, les parties des droites DP & BE , FP & CG , DH & IE , FK & LG coupées de part & d'autre du point P , seront respectivement égales; puisque les droites DE , PB & HI sont coupées en deux également au même point, ainsi que les droites FG , PC & KL . Or si on imagine à présent que DPF , EPG représentent deux cônes opposés dont les angles générateurs DPF , EPG soient infiniment petits, & que les lignes DH , EI soient aussi infiniment petites, on verra que les particules $DHKF$, $GLIE$ des cônes, coupées par les superficies des sphéroïdes, seront entr'elles, à cause de l'égalité des lignes DH , EI , comme les quarrés de leurs distances au corpuscule P , & par conséquent elles attireront également ce corpuscule. Par la même raison, si on divise les espaces DPF , $EGCB$ en une infinité de particules par une infinité de superficies sphéroïdales semblables & concentriques qui aient le même axe, toutes ces particules attireront également le corps P de part & d'autre en sens contraire.

Les forces du cône DPF & du cône tronqué $EGCB$ étant ainsi égales & contraires, elles se détruisent mutuellement, & il en est de même des forces de toute la matière placée hors du sphéroïde intérieur $PCBM$. Le corps P est donc attiré par ce seul sphéroïde intérieur $PCBM$, & par conséquent, par le Corol. 3. de la Prop. 72. Son attraction est à la force par laquelle le corps A est attiré par le sphéroïde entier $AGOD$ comme la distance PS est à la distance AS . C. Q. F. D.

PROPOSITION XCII. PROBLÈME XLVI.

Une matière attractive étant donnée, trouver la loi suivant laquelle ses parties attirent.

On fera de cette matière une sphere, un cylindre, ou un autre corps régulier dont la loi d'attraction puisse être déterminée par les Propositions 80. 81. & 91. Ensuite on fera des expériences pour déterminer la loi suivant laquelle ce corps attirera un corpuscule placé à différentes distances; & de la loi que suivra l'attraction du total, on tirera celles que doivent suivre toutes ses parties. C. Q. F. T.

PROPOSITION XCIII. THÉORÈME XLVII.

Si un solide terminé d'un côté par un plan, & infini de tous les autres côtés, est formé de particules égales & également attractives, dont les forces décroissent en raison d'une puissance quelconque plus que doublée des distances, un corpuscule placé de l'un ou de l'autre côté du plan, sera attiré par ce solide entier avec une force qui décroîtra dans la raison d'une puissance de la distance du corpuscule au plan, dont l'exposant sera moindre de trois unités que celui de la puissance des distances suivant laquelle se fait l'attraction des particules.

Cas. 1. Le plan LG terminant le solide lequel s'étend à l'infini du côté de I , & est supposé partagé en un nombre innombrable de plans mHM , nIN , oKO , &c. parallèles à LG , soit placé premièrement le corps attiré dans un point C hors du

solide, & soit abaissée sur LG la perpendiculaire $CGHI$, & soit pris n , qu'on ne suppose pas moindre que 3, pour exprimer la puissance des distances suivant laquelle décroissent les forces attractives des particules de ce solide. Cela posé, la force avec laquelle un plan quelconque mHM attire le point C , sera, par le Corol. 3. de la Prop. 90. réciproquement comme CH^{n-2} , en sorte qu'en prenant sur mHM , IGL , nIN , oKO les droites GL , HM , IN , KO , &c. respectivement proportionnelles aux quantités $\frac{1}{CG^{n-2}}$, $\frac{1}{CH^{n-2}}$, $\frac{1}{CI^{n-2}}$, $\frac{1}{CK^{n-2}}$, &c.

Ces droites expriment les forces de ces plans; d'où il suit, que la somme de ces forces, ou, ce qui revient au même, la force du solide entier sera proportionnelle à l'aire $GLOK$ supposée étendue jusqu'à l'infini du côté de OK ; mais cette aire, par les méthodes connues des quadratures, est réciproquement comme CG^{n-3} . Donc la force de tout le solide est réciproquement comme CG^{n-3} . *C. Q. F. D.*

Fig. 146.

Cas. 2. Le corpuscule C étant supposé présentement placé au-dedans du solide, soit prise la distance CK égale à la distance CG , il est clair que la partie $LGloKO$ du solide, terminée par les plans parallèles IGL , oKO , n'attirera vers aucun côté le corpuscule C placé au milieu, les actions contraires dirigées vers des points opposés se détruisant mutuellement à cause de leur égalité. Ainsi le corpuscule C n'est attiré que par la force des parties du solide qui sont au-delà du plan OK ; & cette force par le premier cas est réciproquement comme CK^{n-3} . *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Si le solide $LGIN$ est terminé des deux côtés par les deux plans parallèles infinis LG , IN , on connoîtra sa force attractive, en soustrayant de la force attractive du solide entier $LGKO$ la force attractive de sa partie ultérieure $NIKO$ étendue infiniment vers KO .

Cor. 2.

Cor. 2. Si l'attraction de la partie ultérieure de ce solide infini est très-petite, en comparaison de l'attraction de la partie citérieure, on peut la négliger : & l'attraction de la partie citérieure décroîtra à peu près comme la puissance $n-3$ de la distance.

Cor. 3. De-là, si un corps quelconque fini & plan d'un côté attire un corpuscule placé vers le milieu de ce plan, & à une distance de ce plan, qui soit très-petite par rapport aux dimensions du corps attirant qu'on suppose composé de particules homogènes dont les forces attractives décroissent en raison d'une puissance quelconque plus que quadruplée des distances, la force attractive de tout le corps attirant décroîtra à peu près dans la raison d'une puissance de la distance dont l'Exposant sera moindre de trois unités que celui de la puissance suivant laquelle agissent les particules. Cette Proposition n'a pas lieu lorsqu'il s'agit de corps composés de particules dont les forces attractives décroissent en raison de la puissance triplée des distances ; parce que dans ce cas l'attraction de cette partie ultérieure du corps infini dont on a parlé dans le Corol. 2. est toujours infiniment plus forte que l'attraction de la partie citérieure.

S C H O L I E.

Si un corps jetté suivant une direction & avec une vitesse quelconque, est attiré perpendiculairement vers un plan donné par une force dont la loi est donnée, on trouvera la courbe qu'il décrira en cherchant, par la Prop. 39. le mouvement du corps qui descend en ligne droite vers ce plan, & en composant, par le Corol. 2. des loix, ce mouvement avec le mouvement uniforme dirigé dans des lignes parallèles à ce même plan. Et au contraire, si on cherche la loi de l'attraction dirigée perpendiculairement vers le plan, par cette condition, que le corps attiré se meuve dans une ligne courbe quelconque donnée, on résoudra le Problème en opérant comme dans le Problème 3.

Mais la solution de ce dernier Problème peut être plus courte en employant ainsi les suites.

LIVRE
PREMIER.

Fig. 146.

Supposons, par exemple, qu'un corps décrive une courbe dont les ordonnées, faisant avec le plan attirant un angle con-

stant, soient comme les puissances $\frac{m}{n}$ des abscisses A prises sur

ce plan. Pour trouver la force attractive de ce plan en vertu de laquelle cette courbe est décrite, on supposera que l'abscisse A augmente d'une très-petite partie O , & on transformera l'ordonnée

$$A + O^{\frac{m}{n}} \text{ en une suite infinie } A^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} O A^{\frac{m-n}{n}} + \frac{m(m-n)}{2nn} O O A^{\frac{m-2n}{n}}$$

+ &c. & on supposera la force cherchée propor-

tionnelle au terme de cette suite, dans lequel O a deux dimen-

sions, c'est-à-dire, que cette force sera comme $\frac{m(m-n)}{2nn}$

$O O A^{\frac{m-2n}{n}}$, ou comme $\frac{m(m-n)}{2nn} A^{\frac{m-n}{n}}$, ou bien encore

comme $\frac{m(m-n)}{nn} B^{\frac{m-2n}{m}}$.

Si $m=2$, $n=1$, ce qui fait de la courbe décrite une parabole, la force deviendra comme $2B^0$, c'est-à-dire, qu'elle deviendra constante. Or on sçait en effet, par ce qu'a appris Galilée, qu'une force constante, & qui agit parallèlement, fait décrire une parabole.

Si $m=0-1$ & $n=1$; la force deviendra comme $2A^{-3}$ ou $2B^3$. Donc, une force qui feroit comme le cube de l'ordonnée, feroit décrire une hyperbole. Mais passons à quelques autres Propositions sur le mouvement.



QUATORZIÈME SECTION.

Du Mouvement des corpuscules attirés par toutes les parties d'un corps quelconque.

PROPOSITION XCIV. THÉOREME XLVIII.

Si deux milieux, dont chacun est homogène, sont séparés par un espace terminé de part & d'autre par des plans parallèles, & qu'un corps en passant par cet espace soit attiré ou poussé perpendiculairement vers l'un ou l'autre de ces milieux, que de plus il n'éprouve aucune autre force qui le retarde ou l'accélère ; & que l'attraction soit toujours la même partout à des distances égales de l'un & de l'autre plan prises du même côté de ces plans : le sinus d'incidence sur l'un ou l'autre plan sera en raison donnée au sinus d'émergence par l'autre plan.

Cas. 1. Aa, Bb, étant deux plans parallèles, supposez qu'un corps tombe sur le premier plan Aa suivant la ligne GH, & que pendant tout le temps de son passage par l'espace intermédiaire il soit attiré ou poussé vers le milieu où s'est fait l'incidence, en sorte que par cette attraction il décrive la courbe HI, & qu'il sorte suivant la ligne IK. Elevez ensuite sur le plan d'émergence Bb la perpendiculaire IM qui rencontre en M la ligne d'incidence GH prolongée, & en R le plan d'incidence Aa. Du centre L où la ligne d'émergence prolongée rencontre HM, & du rayon LI décrivez un cercle qui coupe la ligne HM en P & en Q, & en N la ligne MIR. Cela fait, en supposant l'attraction ou l'impulsion uniforme, la courbe HI fera, suivant les démonstrations de Galilée, une parabole, & aura par conséquent cette propriété, que le rectangle sous le paramètre donné & sous la ligne IM est égal au carré de HM ; mais

Fig. 147.

à cause que la ligne HM est coupée en deux parties égales au point L , il est clair, en abaissant la perpendiculaire LO sur MI , que MO est égale à OR , ainsi que MN à IR . Or comme IR est donnée, MN le sera aussi; donc le rectangle $NM \times MI$ sera au rectangle sous le paramètre & sous IM , c'est-à-dire, à HM^2 , en raison donnée. De plus, le rectangle $NM \times MI$ est égal au rectangle $PM \times MQ$, c'est-à-dire, à la différence des carrés ML^2 & PL^2 , ou LI^2 ; & HM^2 à une raison donnée à ML^2 puisqu'il en est quadruple: donc la raison de ML^2 à LI^2 à ML^2 est donnée, & par conséquent la raison de LI^2 à ML^2 , & celle de LI à LM sont aussi données. Maintenant dans tout triangle LMI , les sinus des angles sont proportionnels aux côtés opposés, donc la raison du sinus de l'angle d'incidence LMR au sinus de l'angle d'émergence LIR est donnée. C. Q. F. D.

Cas 2. Que le corps passe à présent successivement par plusieurs espaces terminés par des plans parallèles $AabB$, $BbcC$, &c. & qu'il soit pressé par une force uniforme dans chaque espace, mais différente dans des espaces différents; il est clair, par ce qui vient d'être démontré, que le sinus d'incidence sur le premier plan Aa , sera au sinus d'émergence du second plan Bb , en raison donnée, & que ce dernier sinus, qui devient le sinus d'incidence sur le second plan Bb , sera au sinus d'émergence du troisième plan Cc , en raison donnée; ensuite, que ce nouveau sinus sera au sinus d'émergence du quatrième plan Dd , en raison donnée; & ainsi à l'infini, en sorte qu'il en résultera, que le sinus d'incidence sur le premier plan est au sinus d'émergence du dernier plan en raison donnée. Imaginons à présent que les intervalles des plans diminuent à l'infini, & que le nombre de ces plans augmente de même, en sorte que l'action de l'attraction ou de l'impulsion devienne continue selon une loi quelconque donnée; alors la raison du sinus d'incidence sur le premier plan au sinus d'émergence du dernier plan, sera aussi donnée. C. Q. F. D.

PROPOSITION XCV. THÉORÈME XLIX.

LIVRE.
PREMIER.

Les mêmes choses étant posées , la vitesse du corps avant l'incidence est à sa vitesse après l'émergence , comme le sinus d'émergence au sinus d'incidence.

Soient prises égales les lignes AH , Id , & soient élevées les perpendiculaires AG , dK qui rencontrent les lignes d'incidence & d'émergence GH , IK , en G & K . Soit prise ensuite sur GH , $TH=IK$, & soit abaissée la perpendiculaire Tv sur le plan Aa . Si l'on décompose, par le Corol. 2. des loix, le mouvement du corps en deux mouvemens, l'un perpendiculaire aux plans Aa , Bb , Cc , &c. & l'autre parallèle à ces mêmes plans, la force de l'attraction ou de l'impulsion agissant suivant des lignes perpendiculaires, ne changera rien aux mouvemens suivant des lignes parallèles, & par conséquent le corps par ce mouvement parcourra en temps égaux dans la direction parallèle aux plans les espaces égaux qui sont entre la ligne AG & le point H , & entre le point I & la ligne dK ; c'est-à-dire, qu'en temps égaux il parcourra les lignes GH , IK ; & par conséquent la vitesse avant l'incidence sera à la vitesse après l'émergence comme GH à IK ou TH , ou, ce qui revient au même, comme AH ou Id à vH , ou enfin, à cause de l'égalité des rayons TH , ou IK , comme le sinus d'émergence au sinus d'incidence.
C. Q. F. D.

Fig. 149.

PROPOSITION XCVI. THÉORÈME L.

Les mêmes choses étant posées , & supposant de plus que le mouvement avant l'incidence soit plus prompt qu'après : si on donne une certaine inclinaison à la ligne d'incidence , le corps se réfléchira , & fera l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.

Car supposant, comme ci-dessus, qu'un corps décrive des arcs paraboliques entre les plans parallèles Aa , Bb , Cc , &c. & que ces arcs soient HP , PQ , QR , &c. soit prise l'obliquité de la ligne d'incidence GH sur le premier plan Aa , telle, que

Fig. 150.

le sinus d'incidence soit au rayon du cercle dont il est sinus, dans la raison que ce même sinus d'incidence a au sinus d'émergence hors du plan Dd dans l'espace $DdeE$: le sinus d'émergence se trouvant par ce moyen égal au rayon, l'angle d'émergence sera droit, & la ligne d'émergence coïncidera avec le plan Dd . Le corps étant donc arrivé au point R de ce plan, & ayant alors une direction qui coïncide avec ce plan, il est clair qu'il ne pourra pas aller plus avant que ce plan Ee . Mais le même corps ne peut pas non plus continuer à se mouvoir dans la ligne d'émergence Rd , parce qu'il est perpétuellement attiré, ou poussé vers le milieu de l'incidence : il retournera donc entre les plans Cc , Dd , en décrivant l'arc parabolique QRq , dont le sommet est en R ; & en coupant le plan Cc sous le même angle en q , qu'il l'avoit coupé auparavant en Q ; ensuite, continuant à décrire des arcs paraboliques qp , ph , &c. semblables & égaux aux premiers arcs paraboliques QP , PH , &c. il coupera le reste des plans sous les mêmes angles en p , h , &c. qu'il les avoit coupés auparavant en P , H , &c. & il aura en sortant la même obliquité en h , que celle qu'il avoit dans son incidence en H . Si on conçoit à présent que les intervalles des plans Aa , Bb , Cc , Dd , Ee , &c. diminuent à l'infini, & que le nombre de ces plans augmente de même, en sorte que l'attraction ou l'impulsion devienne continue selon une loi quelconque donnée, on verra que l'angle d'émergence sera toujours égal à l'angle d'incidence. *C. Q. F. D.*

S C H O L I E.

On peut appliquer ces recherches sur l'attraction à la réflexion de la lumière & à sa réfraction qui se fait, comme Snellius l'a découvert, en raison donnée des Sécantes, & par conséquent en raison donnée des sinus, ainsi que Descartes l'a fait voir.

Car il est certain, par la découverte des phénomènes des satellites de Jupiter confirmée par les observations de plusieurs Astronomes, que la propagation de la lumière est successive, & qu'el-

le vient du soleil à la terre en sept ou huit minutes; & les rayons en passant près des angles des corps opaques ou transparens tels que l'extrémité d'une lame de couteau, d'une pièce de monnoye, d'un morceau de verre, ou de pierre, &c. s'infléchissent autour de ces corps comme s'ils en étoient attirés: c'est ce qu'a découvert Grimaldi il y a longtemps en faisant entrer un rayon de lumière par un trou dans une chambre obscure, & ce que j'ai vérifié.

Ceux de ces rayons qui en passant approchent le plus près des corps se courbent davantage, comme s'ils étoient plus attirés, ainsi que je m'en suis assuré par des expériences exactes. Ceux qui passent à de plus grandes distances s'infléchissent moins; & ceux qui passent à des distances encore plus grandes s'infléchissent un peu en sens contraire, & forment trois faisceaux de couleurs. Dans la figure ci-jointe, *S* représente la pointe d'un couteau ou d'un corps quelconque *ASB*; & *gowog*, *fnunf*, *emtme*, *dlslld*, sont des rayons qui s'infléchissent vers le couteau par des arcs *oiwo*, *nun*, *mtm*, *lsl*, plus ou moins concaves selon leurs distances. Or comme cette courbure des rayons se fait à une certaine distance du couteau, les rayons qui l'atteignent doivent donc s'être infléchis avant de l'avoir atteint. Il en est de même des rayons qui tombent sur du verre: ainsi la réfraction ne se fait pas dans le seul point de l'incidence; mais peu à peu par l'incurvation continuelle des rayons, laquelle se fait en partie dans l'air avant qu'ils atteignent le verre, & en partie, si je ne me trompe, dans le verre même après qu'ils y sont entrés comme il est marqué dans la figure ci-jointe où les rayons *ckzc*, *biyb*, *ahxa*, dont l'incidence se fait en *r*, *q* & *p*, s'infléchissent entre *k* & *z*, *i* & *y*, *h* & *x*.

Fig. 151:

Fig. 152:

A cause de l'analogie qui est entre le mouvement progressif de la lumière, & celui des autres projectiles, j'ai cru nécessaire d'ajouter les Propositions suivantes en faveur des Opriciens. Au reste, je ne m'embarrasse point de la nature des rayons, je n'exa-

mine point s'ils sont matériels ou non ; mais je me contente de déterminer les trajectoires des corps qui peuvent être semblables à celles que décrivent les rayons.

PROPOSITION XCVII. PROBLÈME XLVII.

Supposant que le sinus d'incidence sur une superficie quelconque , soit au sinus d'émergence en raison donnée , & que l'incurvation des rayons près de cette superficie , se fasse dans un espace assez petit pour le regarder comme un point , on demande la superficie propre à réunir dans un lieu donné tous les corpuscules qui émanent successivement d'un autre lieu donné.

Fig. 153.

Soit A le lieu d'où les corpuscules partent , & B le lieu dans lequel ils doivent se réunir ; soient de plus , CDE la courbe qui en tournant autour de l'axe AB décrit la superficie cherchée ; D & E deux points quelconques de cette courbe , EF, EG , des perpendiculaires abaissées de E sur les rayons incidens & rompus AD & DB . Imaginant que le point D s'approche du point E , la dernière raison de l'incrément DF de AD au décrement DG de BD fera celle du sinus d'incidence au sinus d'émergence , & par conséquent elle sera donnée. Donc les quantités finies qui sont les augmentations de AD , & celles qui sont les diminutions de BD sont encore dans la même raison. De là il suit, qu'en choisissant un point quelconque C dans l'axe AB pour être le sommet de la courbe demandée CDE , on n'aura qu'à prendre l'augmentation CM de AC à la diminution CN de BC dans la raison du sinus d'incidence au sinus d'émergence , & décrire des centres A & B , & des intervalles AM , BN , deux cercles qui se coupent mutuellement en D , afin d'avoir un point quelconque D de la courbe cherchée. *C. Q. F. T.*

Cor. 1. En supposant que le point A ou B s'éloigne à l'infini , ou qu'il vienne de l'autre côté du point C , on aura toutes les courbes que Descartes a données dans sa Géométrie & dans son Optique

Optique pour les réfractions ; & comme il n'a point exposé la manière de les trouver , j'ai cru devoir la donner dans cette Proposition.

Cor. 2. Si un corps tombant sur une surface quelconque CD , & dans la direction d'une ligne droite quelconque AD , tirée suivant une loi quelconque, traverse cette surface, & prend en la quittant une autre direction quelconque DK ; je dis, que si on imagine tirées les courbes CP , CQ toujours perpendiculaires aux directions AD , DK , les accroissemens des lignes PD , QD & par conséquent les lignes mêmes PD , QD formées de ces accroissemens seront entr'elles en raison des sinus d'incidence & d'émergence : & au contraire.

PROPOSITION XCVIII. PROBLÈME XLVIII.

Les mêmes choses étant posées , & étant décrite autour de l'axe AB une surface attractive quelconque CD , régulière ou irrégulière , au travers de laquelle doivent passer des corps partis du point A ; trouver quelle seroit une autre surface attractive EF capable de faire converger ces corps au point donné B .

Fig. 154.

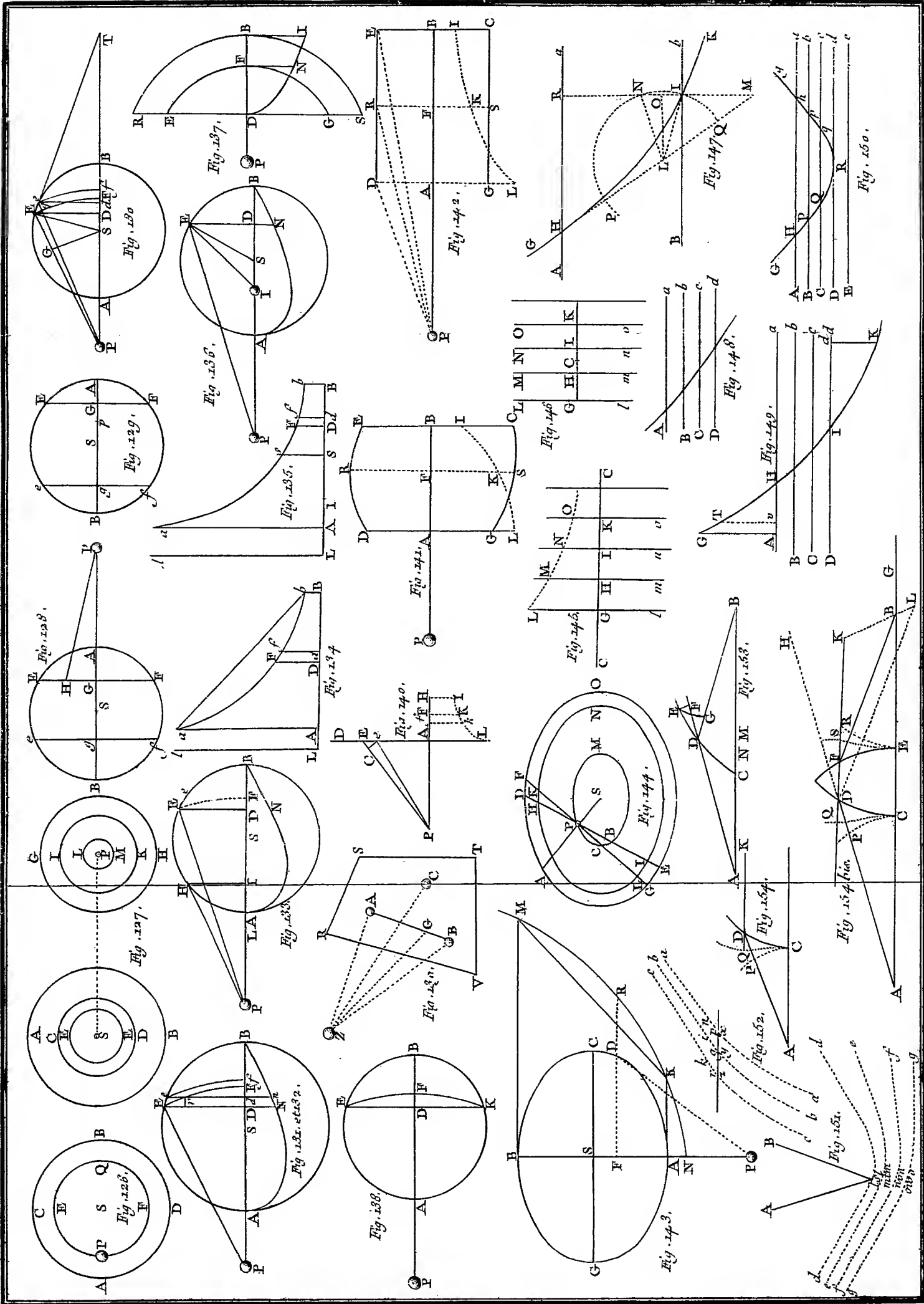
Du point A au point B soit tirée AB coupant la première surface en C & l'autre en E , & soit pris le point D à volonté. Qu'on suppose encore que le sinus d'incidence sur la première surface soit au sinus d'émergence de cette même surface en raison donnée PE , par exemple, comme de M à N , ainsi que le sinus d'émergence de la seconde surface au sinus d'incidence sur cette même surface; ensuite, qu'on prolonge AB en G , en sorte que l'on ait BG à CE comme M à N ; qu'on prolonge aussi AD en H , en sorte que $AH = AG$ & DF en un point K , placé de façon que DK soit à DH dans la raison de N à M . Du point K au point B tirez la droite KB . Du point D comme centre & du rayon

DH décrivez un cercle qui rencontre en L la ligne KB prolongée : enfin tirez BF parallèle à DL ; je dis, que le point F fera un point de la ligne EF capable de produire par sa révolution autour de l'axe AB la surface cherchée. *C. Q. F. F.*

Car les lignes CP , CQ étant toujours respectivement perpendiculaires aux lignes AD , DF , ainsi que les lignes BR , ES , aux lignes FB , FD , & par conséquent ayant toujours QS égale à CE , on aura (par le Cor. 2. de la Prop. 97.) PD à QD comme M à N , par conséquent comme DL à DK , ou comme FB à FK ; & en divisant, comme $DL - FB$ ou $PH - PD - FB$ à FD ou $FQ - QD$. Donc, en composant, comme $PH - FB$ à FQ , c'est-à-dire, (à cause des lignes PH & CG , QS & CE qui sont égales) comme $CE + BG - FR$ à $CE - FS$. Mais (à cause des proportionnelles BG à CE & $M - N$ à N) on a aussi $CE + BG$ à CE comme M à N ; & par conséquent, en divisant, FR à FS comme M à N . Donc (par le Cor. 2. de la Prop. 97.) la surface EF oblige le corps qui tombe sur elle suivant la direction DF de prendre la direction FR qui le mène au point B . *C. Q. F. D.*

S C H O L I E.

On pourroit employer la même méthode pour trois surfaces & pour davantage. Au reste, pour l'optique, les figures sphériques sont celles qui conviennent le mieux. Si pour former les verres objectifs des lunettes on se sert de deux verres sphériques creux, appliqués l'un sur l'autre, & renfermant de l'eau dans leur concavité, il pourra arriver que les réfractions de l'eau corrigeront assez exactement les erreurs de réfractions occasionnées par l'inégalité des surfaces des verres ; & l'on doit préférer ces sortes de verres objectifs aux elliptiques & aux hyperboliques, tant parce qu'ils sont plus aisés à travailler, que parce qu'ils réfractent mieux les



rayons qui tombent hors de l'axe du verre. Cependant ce n'est point assez pour pouvoir perfectionner l'optique qu'on ait assigné aux verres la figure sphérique ou telle autre quelconque, il faudroit encore pouvoir remédier à la différence de réfrangibilité des différens rayons. Tant qu'on ne fera pas en état de corriger les erreurs qui naissent de cette différence, tout ce qu'on fera pour corriger les autres ne sera jamais qu'imparfait.

Fin du premier Livre.



DU MOUVEMENT DES CORPS.

LIVRE SECONDE.

SECTION PREMIERE.

*Du Mouvement des corps qui éprouvent une résistance en raison
de leur vitesse.*

PROPOSITION I. THÉORÈME I.

*Le Mouvement que perdent les corps par la résistance qu'ils éprouvent,
est comme l'espace qu'ils parcourent en se mouvant, lorsque cette
résistance est en raison de leur vitesse.*



Le mouvement perdu à chaque particule égale
du temps étant comme la vitesse, c'est-à-dire,
comme le chemin fait pendant cette particule
de temps, le mouvement perdu pendant le temps
total sera comme le chemin total. C. Q. F. D.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Cor. Ainsi, si un corps privé de toute gravité se meut dans
des espaces libres par la seule force qui lui a été imprimée; &c

que le mouvement total au commencement, ainsi que le reste du mouvement après quelque espace parcouru soient donnés : l'espace total que ce corps peut parcourir dans un temps infini sera aussi donné : & cet espace sera à l'espace déjà décrit, comme le mouvement total au commencement, est à la partie de ce mouvement qui s'est perdue.

L E M M E P R E M I E R.

Les quantités proportionnelles à leurs différences sont en proportion continue.

Soit $A : A - B :: B : B - C :: C : C - D$, &c. on en tirera en renversant $A : B :: B : C :: C : D$, &c. C. Q. F. D.

P R O P O S I T I O N I I. T H É O R È M E I I.

Si un corps éprouve une résistance en raison de sa vitesse, & qu'il se meuve dans un milieu homogène par la seule force qui lui a été imprimée, je dis, qu'en prenant des tems égaux, les vitesses au commencement de chacun de ces tems seront en progression géométrique, & que les espaces parcourus pendant chacun de ces tems seront comme les vitesses.

Cas. 1. Soit divisé le temps en particules égales, & soit supposé au commencement de chacune de ces particules une force résistante qui soit comme la vitesse & qui agisse par un seul coup, le décrement de la vitesse à chacune de ces particules de temps sera comme cette vitesse, car les vitesses sont continuellement proportionnelles à leurs différences. (Lemme 1. Liv. 2.) Donc, si d'un nombre égal de particules on compose des temps quelconques égaux, les vitesses au commencement de ces temps seront comme les termes d'une progression continue pris par sauts, en obmettant un nombre égal de termes intermédiaires. Or les raisons de ces termes pris par sauts sont composées des raisons que les termes intermédiaires également répétés ont entr'eux, lesquelles sont les mêmes, donc ces raisons composées sont les mêmes, & les vitesses proportionnelles à ces termes sont en progression géométrique. Maintenant, soient diminuées ces particules égales de

temps, & soit leur nombre augmenté à l'infini, enforte que l'impulsion de la résistance devienne continue; & les vitesses qui sont toujours en proportion continue dans les commencemens des temps égaux le feront encore dans ce cas. *C. Q. F. D.*

Cas. 2. Et par conséquent les différences des vitesses, c'est-à-dire, leurs parties détruites à chaque particule de temps, sont comme les vitesses totales : mais les espaces décrits à chacune de ces particules du temps sont comme les parties détruites des vitesses. (Prop. 1. Liv. 2.) Donc ils sont aussi comme les vitesses totales.

C. Q. F. D.

Cor. De-là, si on décrit une hyperbole BG , entre les asymptotes perpendiculaires AC , CH , & que AB , GD , soient perpendiculaires sur l'asymptote AC , & qu'on exprime, tant la vitesse du corps que la résistance du milieu dans le commencement du mouvement, par une ligne quelconque donnée AC , & après un temps quelconque par la ligne indéfinie DC ; le temps pourra être exprimé par l'aire $ABGD$, & l'espace décrit pendant ce temps, par la ligne AD . Car si cette aire, par le mouvement du point D , augmente uniformément comme le temps, la ligne DC ainsi que la vitesse décroîtront en proportion géométrique, & les parties de la droite AC décrites dans des temps égaux décroîtront dans la même raison.

Fig. 1.

PROPOSITION III. PROBLÈME I.

Trouver le mouvement d'un corps qui monte ou descend suivant une ligne droite dans un milieu homogène qui résiste en raison de la vitesse pendant que la gravité agit uniformément.

Que la gravité du corps qui remonte soit représentée par un rectangle quelconque donné $BACH$, & la résistance du milieu au commencement de son ascension par le rectangle $BADE$; pris du côté opposé au premier. Entre les asymptotes perpendiculaires AC , CH , soit décrit par le point B une hyperbole qui coupe les perpendiculaires DE , de en G & en g ; il est clair;

Fig. 2.

que le corps en montant pendant le temps $D G g d$ parcourera l'espace $E G g e$, & que pendant le temps $D G B A$ de toute son ascension il parcourera l'espace $E G B$; dans le temps $A B K I$ il parcourera en descendant l'espace $B F K$, & dans le temps $I K k i$; il parcourera en descendant l'espace $K F f k$ & les vitesses du corps (proportionnelles aux résistances du milieu) à la fin des temps entiers, seront exprimées par les espaces infiniment petits, $A B E D$, $A B e d$; respectivement proportionnels aux espaces $A B F I$, $A B f i$; & la plus grande vitesse que le corps puisse acquérir en descendant sera $B A C H$.

Fig. 3.

Car soit divisé le rectangle $B A C H$ en un nombre infini de rectangles $A k$, $K l$, $L m$, $M n$, &c. qui soient comme les incréments des vitesses en autant de temps égaux; & les rectangles infiniment petits, $A k$, $A l$, $A m$, $A n$, &c. seront comme les vitesses totales, & par conséquent (par l'hypothèse) comme les résistances du milieu au commencement de chacun de ces temps égaux. Soit fait $A C$ à $A K$ ou $A B H C$ à $A B k K$, comme la force de la gravité à la résistance dans le commencement du second temps, & soient les résistances soustraites de la force de la gravité, les restes $A B H C$, $K k H C$, $L l H C$, $M m H C$, &c. seront comme les forces absolues par lesquelles le corps est pressé au commencement de chacun de ces temps, & par conséquent (par la seconde Loi du mouvement) comme les incréments des vitesses, c'est-à-dire, comme les rectangles $A k$, $K l$, $L m$, $M n$, &c. c'est à-dire, (Lemme I. du Livre II.) en progression géométrique. Prolongeant donc les droites $K k$, $L l$, $M m$, $N n$, &c. jusqu'à ce qu'elles rencontrent l'hyperbole en q , r , s , t , &c. les aires $A B q K$, $K q r L$, $L r s M$, $M s t N$, &c. seront égales, & par conséquent elles seront toujours proportionnelles tant aux temps qu'aux forces de la gravité qui sont toujours égales. Or l'aire $A B q K$, (Cor. 3. Lemme 7. & 8. du Liv. I.) est à l'aire $B k q$ comme $K q$ à $\frac{1}{2} k q$, ou comme $A C$ à $\frac{1}{2} A K$, c'est-à-dire, comme la force de la gravité à la résistance dans le milieu du

premier temps. Et par le même raisonnement, les aires $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. sont aux aires $qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. comme les forces de la gravité aux résistances dans le milieu du second temps, du troisième, du quatrième, &c. Donc les aires égales $BAKq$, $qKLr$, $rLMs$, $sMNt$, &c. étant proportionnelles aux forces de la gravité, les aires Bkq , $qklr$, $rlms$, $smnt$, &c. seront proportionnelles aux résistances dans les milieux de chacun des temps, c'est-à-dire, (par l'hypothèse) aux vitesses, & par conséquent aux espaces décrits. Soient prises les sommes de ces quantités proportionnelles, & les aires Bkq , Blr , Bms , Bnt , &c. seront proportionnelles à tous les espaces décrits, de même que les aires $ABqK$, $ABrL$, $ABsM$, $ABtN$, &c. le seront aux temps. Donc le corps en descendant dans un temps quelconque $ABrL$ décrit l'espace Blr , & dans le temps $LrtN$ l'espace $rlnt$. *C. Q. F. D.*

Fig. 3.

Et c'est la même démonstration pour le mouvement en remontant. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc la plus grande vitesse que le corps peut acquérir en descendant est à la vitesse acquise dans un temps quelconque donné, comme la force donnée de la gravité par laquelle ce corps est continuellement pressé, est à la force de la résistance qui s'oppose à cette force à la fin de ce temps.

Cor. 2. Or le temps étant augmenté en progression arithmétique, la somme de cette plus grande vitesse, & de la vitesse dans l'ascension, ainsi que leur différence dans la descension, décroît en progression géométrique.

Cor. 3. Et de même les différences des espaces qui sont décrits dans les différences égales des temps, décroissent dans la même progression géométrique.

Cor. 4. Mais l'espace décrit par le corps est la différence des deux espaces dont l'un est comme le temps pris depuis le commencement de la descension, & l'autre comme la vitesse, lesquels espaces sont égaux entr'eux au commencement du mouvement.

PROPOSITION IV. PROBLÈME II.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Supposant que la force de la gravité soit uniforme dans quelque milieu homogène, & qu'elle tende perpendiculairement au plan de l'horizon; trouver le mouvement d'un projectile dans ce même milieu, en supposant que la résistance soit proportionnelle à la vitesse.

Fig. 4.

Qu'un projectile parte d'un lieu quelconque D , selon une ligne droite quelconque donnée DP , & que la vitesse au commencement du mouvement soit exprimée par la ligne DP . Que du point P à la ligne horizontale DC , on abaisse la perpendiculaire PC , & qu'on coupe DC en A desorte que DC soit à CA comme la résistance du milieu produite par le mouvement en hauteur est à la force de gravité dans le commencement du mouvement; ou, (ce qui est la même chose) que le point A soit pris en sorte que le rectangle sous DA , & DP , soit au rectangle sous AC , & CP comme toute la résistance au commencement du mouvement est à la force de la gravité. Cela fait, soit décrite une hyperbole quelconque $GTBS$ entre les asymptotes DC , CP , laquelle coupe les perpendiculaires DG , AB en G & en B , & soit achevé le parallélogramme $DGKC$, dont le côté GK , coupe AB en Q . Soit prise la ligne N dans la même raison à QB que DC à CP ; & ayant élevé sur la ligne DC à un point quelconque R une perpendiculaire RT , qui rencontre l'hyperbole en T , & les droites EH , GK , DP en I , t , & V , prenez sur cette perpendiculaire Vr égale à $\frac{tGT}{N}$; ou (ce qui est la même chose) prenez Rr égale à $\frac{GTIE}{N}$; & le projectile dans le temps $DRTG$ arrivera au point r , en décrivant la ligne courbe $Dr\alpha F$ donnée par les points r , & il acquerra la plus grande hauteur en α , dans la perpendiculaire AB , après quoi il continuera de s'approcher toujours de l'asymptote PC . Quant à la vitesse dans un point quelconque r , elle

fera comme la tangente rL de la courbe. *C. Q. F. T.*

Car N est à QB comme DC à CP ou comme DR à RV .

Donc $RV = \frac{DR \times QB}{N}$ & Rr , (c'est-à-dire, $RV - Vr$,

ou $\frac{DR \times QB - tGT}{N}$) = $\frac{DR \times AB - RDGT}{N}$. Que le

temps soit représenté par l'aire $RDGT$, & (Cor. 2. des Loix) soit le mouvement du corps décomposé en deux mouvemens, l'un en montant, l'autre transversal. La résistance étant comme le mouvement, qu'elle soit aussi décomposée en deux parties proportionnelles & opposées aux deux parties du mouvement décomposé : par ce moien la longueur décrite par le mouvement transversal fera (Prop. 2. de ce Livre) comme la ligne DR , mais la hauteur (Prop. 3. de ce Livre) fera comme l'aire $DR \times AB - RDGT$, c'est-à-dire, comme la ligne Rr . Et dans le commencement du mouvement l'aire $RDGT$ est égale au rectangle $DR \times AQ$, donc cette ligne Rr (ou $\frac{DR \times AB - DR \times AQ}{N}$) est alors à DR comme $AB - AQ$,

ou QB à N , ce qui est comme CP à DC ; & par conséquent comme le mouvement en hauteur au mouvement transversal au commencement. Or comme Rr est toujours proportionnelle à l'espace parcouru en hauteur, & DR toujours proportionnelle à l'espace parcouru d'un mouvement transversal, & que Rr est à DR dans le commencement comme l'espace en hauteur est à l'espace transversal : il est nécessaire que Rr soit toujours à DR , comme l'espace en hauteur à l'espace transversal, & que par conséquent le corps se meuve dans la ligne $Dr a F$ qui est le lieu des points r . *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc $Rr = \frac{DR \times AB}{N} - \frac{RDGT}{N}$: donc, si on pro-

longe RT en X , enforte que $RX = \frac{DR \times AB}{N}$, c'est-à-dire, si on achève le parallélograme $ACP Y$, qu'on tire DY cou-

LIVRE
SECOND.

Fig. 4.

Fig. 4.

pant CP en Z , & qu'on prolonge RT jusqu'à ce qu'elle rencontre DY en X ; on aura $Xr = \frac{RDGT}{N}$, & par conséquent proportionnelle au temps.

Fig. 5.

Cor. 2. Donc, si l'on prend un nombre innombrable de CR , ou (ce qui est la même chose) un nombre innombrable de ZX en progression géométrique, on aura autant de Xr en progression arithmétique. Et delà on pourra facilement décrire la courbe $Dr a F$ par les tables des logarithmes.

Cor. 3. Si du sommet D du diamètre DG prolongé en embas & d'un paramètre qui soit à $2DP$ comme toute la résistance au commencement du mouvement à la force de la gravité, on construit une parabole; la vitesse avec laquelle le corps doit partir du lieu D , selon la droite DP , pour qu'il décrive, dans un milieu qui résiste uniformément, la ligne courbe $Dr a F$, sera la même que celle avec laquelle il devrait partir du même lieu D selon la même ligne droite DP pour décrire la parabole dans un milieu non résistant. Car le paramètre de cette parabole dans le commencement du mouvement est $\frac{DV^2}{Vr}$, & Vr est $\frac{tGT}{N}$ ou $\frac{DR \times Tt}{2N}$; mais la droite qui toucheroit l'hyperbole GTS en G est parallèle à DK , donc Tt est $\frac{CK \times DR}{DC}$, & comme N étoit $\frac{QB \times DC}{CP}$, Vr fera par conséquent $\frac{DR^2 \times CK \times CP}{2DC^2 \times QB}$ ou (à cause des proportionnelles DR & DC , DV & DP) $\frac{DV^2 \times CK \times CP}{2DP^2 \times QB}$, donc le paramètre $\frac{DV^2}{Vr}$ devient $\frac{2DP^2 \times QB}{CK \times CP}$, ou (à cause des proportionnelles QB & CK , DA & AC) $\frac{2DP^2 \times DA}{AC \times CP}$ & par conséquent il est à $2PD :: DP \times DA : CP \times AC$; c'est-à-dire, comme la résistance à la gravité. *C. Q. F. D.*

Cor. 4.

Cor. 4. Delà, si un corps est lancé d'un lieu quelconque D avec une vitesse donnée, selon une ligne droite DP donnée de position; & que la résistance du milieu soit donnée dans le commencement du mouvement: on trouvera la courbe $Dr a F$ que le même corps décrira. Car la vitesse étant donnée, on sçait que le parametre de la parabole est donné: & prenant $2 DP$ à ce parametre, comme la force de la gravité est à la force de la résistance, on aura DP . Ensuite coupant DC en A , en sorte que $CP \times CA$ soit à $DP \times DA$ dans cette même raison de la gravité à la résistance, on aura le point A , & par conséquent la courbe $Dr a F$.

Fig. 5.

Cor. 5. Et au contraire, si la courbe $Dr a F$ est donnée, on aura la vitesse du corps, & la résistance du milieu à chaque lieu r . Car de la raison donnée de $CP \times AC$ à $DP \times DA$, on tire la résistance du milieu au commencement du mouvement, & le parametre de la parabole, ce qui donne aussi la vitesse au commencement du mouvement. Ensuite, de la longueur de la tangente rL , on tire la vitesse qui lui est proportionnelle, & par conséquent la résistance du milieu à un lieu quelconque r , laquelle est proportionnelle à cette vitesse.

Fig. 4.

Cor. 6. De ce que la longueur $2PD$ est au parametre de la parabole comme la gravité à la résistance en D ; & de ce que la vitesse étant augmentée, la résistance augmente dans la même raison, & le parametre de la parabole dans la raison doublée de cette raison; il suit que la longueur $2PD$ augmentera dans cette raison simple, qu'elle sera toujours proportionnelle à la vitesse, & qu'elle n'augmentera, ni ne diminuera, quoique l'angle CDP change, à moins que la vitesse ne change aussi.

Cor. 7. D'où on voit la maniere de déterminer à peu près la courbe $Dr a F$ par les phénomènes, & de conclure delà la résistance & la vitesse avec laquelle le corps a été lancé. Soient deux corps semblables & égaux jettés avec la même vitesse d'un lieu D sous divers angles CDP , CDp , & que les lieux F, f ,

Fig. 6.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. 6. & 7.

où ils tombent sur le plan horizontal DC soient connus. Alors prenant une longueur quelconque pour DP ou Dp , supposant de plus que la résistance en D soit à la gravité dans une raison quelconque, & exprimant cette raison par une longueur quelconque SM , on trouvera par le calcul, & par cette longueur DP , prise à volonté, les longueurs DF , Df ; & ayant trouvé par le calcul la raison de $\frac{Ff}{DF}$ on en ôtera cette même raison trouvée par les expériences, & on en exprimera la différence par la perpendiculaire MN . On recommencera ensuite la même chose une seconde & une troisième fois, en prenant toujours une nouvelle raison SM de la résistance à la gravité, & rassemblant les différences on aura une nouvelle différence MN . Plaçant alors les différences positives d'un côté de la droite SM & les négatives de l'autre, & traçant par les points N, N, N la courbe NNN qui coupe la droite SM en X , SX fera la vraie proportion cherchée de la résistance à la gravité. Au moyen de cette proportion le calcul donnera la longueur DF , & la longueur, qui sera à la longueur supposée DP comme la longueur DF connue par l'expérience à la longueur DF ainsi trouvée, fera la vraie longueur DP , laquelle suffira pour donner la ligne courbe $DraF$ que le corps décrit, la vitesse du corps, & la résistance à chaque lieu.

SCHOLIE.

Au reste, l'hypothèse qui fait la résistance des corps en raison de la vitesse, est plus mathématique que conforme à la nature. Dans les milieux qui n'ont aucune tenacité les résistances des corps sont en raison doublée des vitesses. Car dans un temps moindre, un corps qui aura une plus grande vitesse communiquera à la même quantité du milieu un mouvement plus grand, en raison de sa plus grande vitesse; donc en temps égal il lui communiquera un mouvement plus grand dans la raison doublée, à cause

de la plus grande quantité des parties du milieu qui sont muës ; & la résistance (Loix 2. & 3. du mouvement) est comme le mouvement communiqué : voyons donc quels mouvemens doivent suivre de cette loi de résistance.

DEUXIÈME SECTION.

Du Mouvement des Corps qui éprouvent une résistance en raison doublée des vitesses.

PROPOSITION V. THÉORÈME III.

Si le corps éprouve une résistance en raison doublée de la vitesse, & qu'il se meuve dans un milieu homogène, par la seule force qui lui a été imprimée ; je dis, qu'en prenant les temps dans une progression géométrique ascendante, les vitesses au commencement de chaque temps seront dans la même progression géométrique inversement ; & que les espaces décrits à chacun de ces temps seront égaux.

Car puisque la résistance du milieu est proportionnelle au carré de la vitesse, & que le décrement de la vitesse est proportionnel à la résistance ; si on divise le temps en un nombre infini de parties égales, les carrés des vitesses à chaque commencement des temps seront proportionnels aux différences de ces mêmes vitesses. Soient ces particules de temps $AK, KL, LM, \&c.$ prises sur la droite CD , & soient élevées les perpendiculaires $AB, Kk, Ll, Mm, \&c.$ rencontrant en $B, k, l, m, \&c.$ l'hyperbole $BklmG$ décrite entre les asymptotes perpendiculaires CD, CH , on aura $AB : Kk :: CK : CA$; & par conséquent $AB - Kk : Kk :: AK : CA$, ou $AB - Kk : AK :: Kk : CA$, c'est-à-dire, comme $AB \times Kk : AB \times CA$, d'où AK & $AB \times CA$ étant données, on aura, $AB - Kk$ comme $AB \times Kk$; & à la fin, (lorsque AB &

Fig. 8.

Kk coïncident) comme AB^2 . Par le même raisonnement, on aura $Kk - Ll$ & $Ll - Mm$, &c. proportionnels à Kk^2 & Ll^2 , &c. Les quarrés des lignes AB , Kk , Ll , Mm sont donc comme leurs différences; & comme les quarrés des vitesses sont aussi comme ces mêmes différences, les deux progressions seront semblables. Ce qui étant démontré, il suit que les aires décrites par ces lignes sont dans une progression semblable à celle des espaces décrits avec ces vitesses. Donc, si la vitesse au commencement du premier temps AK est exprimée par la ligne AB , & la vitesse au commencement du second KL par la ligne Kk , & la longueur décrite dans le premier temps, par l'aire $AKkB$; toutes les vitesses suivantes seront exprimées par les lignes suivantes Ll , Mm , &c. & les longueurs décrites par les aires Kl , Lm , &c. d'où en composant, si le temps total est exprimé par la somme de ses parties AM , la longueur totale décrite sera exprimée par la somme de ses parties $AMmB$. Supposez à-présent que le temps AM soit divisé dans les parties AK , KL , LM , &c. en sorte que CA , CK , CL , CM , &c. soient en progression géométrique; ces parties seront dans la même progression, & les vitesses AB , Kk , Ll , Mm , &c. seront dans la même progression inversement; & par conséquent les espaces décrits Ak , Kl , Lm , &c. seront égaux. *C. Q. F. D.*

Fig. 8.

Cor. 1. Il est donc clair, que si le temps est exprimé par une partie quelconque AD de l'asymptote, & la vitesse dans le commencement de ce temps par l'ordonnée AB ; la vitesse à la fin de ce temps sera exprimée par l'ordonnée DG ; & l'espace total décrit sera représenté par l'aire hyperbolique adjacente $ABGD$: de même, l'espace qu'un corps peut décrire dans un milieu non résistant pendant le même temps AD , & avec la première vitesse AB , sera représenté par le rectangle $AB \times AD$.

Cor. 2. De là on a l'espace décrit dans un milieu résistant, en prenant cet espace à l'espace qui peut être décrit dans le même temps dans un milieu non résistant avec la vitesse uniforme AB .

comme l'aire hiperbolique $ABGD$ est au rectangle $AB \times AD$.

Cor. 3. La résistance du milieu sera aussi donnée en la supposant égale au commencement du mouvement à la force centripete uniforme qui peut produire la vitesse AB , dans un corps qui tombe dans un milieu non résistant pendant le temps AC . Car si on mene BT qui touche l'hyperbole en B , & rencontre l'asymptote en T ; la droite AT sera égale à AC , & représentera le temps dans lequel la premiere résistance étant uniformément continuée, peut ôter au corps toute la vitesse AB .

Cor. 4. Et par-là on a aussi la proportion de cette résistance à la force de la gravité, ou à une autre force centripete quelconque donnée.

Cor. 5. Et réciproquement, si la proportion de la résistance à une force centripete quelconque est donnée, on aura aussi le temps AC pendant lequel la force centripete, égale à la résistance, peut produire une vitesse quelconque AB ; & on aura par-là le point B , par lequel on doit décrire l'hyperbole: donc les asymptotes seront CH , CD , ainsi que l'espace $ABGD$ que le corps peut décrire en commençant à se mouvoir avec une vitesse AB , dans un milieu également résistant pendant un temps quelconque AD .

PROPOSITION VI. THÉORÈME IV.

Les corps sphériques, homogènes & égaux qui éprouvent une résistance en raison doublée des vitesses, & qui se meuvent par les seules forces qui leur ont été imprimées, décrivent toujours des espaces égaux dans des temps réciproquement proportionnels aux vitesses qu'ils ont au commencement & ils perdent des parties de vitesse proportionnelles à leur vitesse totale.

Ayant décrit une hyperbole quelconque $BbEe$, dont les asymptotes soient les perpendiculaires CD , CH , & qui soit coupée en B, b, E, e , par les perpendiculaires AB, ab, DE, de , que les vitesses initiales soient exprimées par les perpendiculaires AB, DE , & les temps par les lignes Aa, Dd . On a (par l'hypothèse) $DE : AB :: Aa : Dd$, ou (par la nature de l'hyperbole)

LIVRE
SECOND.

Fig. 8.

Fig. 9.

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. 9.

$:: CA : CD$, & par conséquent $:: Ca : Cd$, donc les aires $ABba$, $DEed$, c'est-à-dire, les espaces décrits sont égaux entr'eux, & les premières vitesses AB , DE sont proportionnelles aux dernières ab , de , & sont par conséquent proportionnelles aux parties perdues de ces vitesses $AB - ab$ $DE - de$. $C. Q. F. D.$

PROPOSITION VII. THÉORÈME V.

Les corps sphériques qui éprouvent une résistance en raison doublée des vitesses, perdent dans des temps qui sont directement comme les premiers mouvemens, & inversement comme les premières résistances, des parties de mouvement proportionnelles aux tous ; & décrivent des espaces en raison composée de ces temps, & des premières vitesses.

Car les parties perdues des mouvemens sont en raison composée des résistances & des temps. Donc comme ces parties sont proportionnelles aux tous, la raison composée de la résistance & du temps doit être celle du mouvement. Ainsi le temps sera comme le mouvement directement, & comme la résistance inversement. C'est pourquoi les particules des temps étant prises dans cette raison, les corps perdront toujours des particules de mouvement proportionnelles aux tous, & par conséquent ils conserveront toujours des vitesses proportionnelles à leurs premières vitesses. Et à cause de la raison donnée des vitesses, ils décriront toujours des espaces qui seront comme les premières vitesses & les temps conjointement: $C. Q. F. D.$

Cor. 1. Donc, si les corps qui ont des vitesses égales éprouvent des résistances qui soient en raison doublée des diamètres : les globes homogènes mus avec des vitesses quelconques perdront des parties de mouvement proportionnelles aux tous en parcourant des espaces proportionnels à leurs diamètres. Ainsi le mouvement d'un globe quelconque sera comme sa vitesse, & sa masse conjointement, c'est-à-dire, comme sa vitesse & le cube de son diamètre ; la résistance (par l'hypothèse) sera comme le

quarré du diamètre & le quarré de la vitesse conjointement ; & le temps (par cette Proposition) est dans la premiere raison directement , & dans la derniere inversement , c'est-à-dire , directement comme le diamètre , & inversement comme la vitesse ; donc l'espace qui est proportionnel au temps & à la vitesse , est comme le diamètre.

Cor. 2. Si des corps qui ont des vitesses égales éprouvent des résistances qui soient en raison sesquiplée de leurs diamètres : les globes homogènes mus avec des vitesses quelconques , perdront des parties de leurs mouvemens proportionnelles aux tous en parcourant des espaces en raison sesquiplée de leurs diamètres.

Cor. 3. Et généralement , si des corps qui ont des vitesses égales éprouvent des résistances en raison d'une puissance quelconque de leurs diamètres ; les espaces dans lesquels des globes homogènes mus avec des vitesses quelconques perdront des parties de mouvement proportionnelles aux tous , seront comme les cubes des diamètres divisés par cette puissance. Soient les diamètres D & E , si les résistances , lorsque les vitesses sont supposées égales , sont comme D^n & E^n , les espaces dans lesquels les globes mus avec des vitesses quelconques perdront des parties de mouvement proportionnelles aux tous , seront comme D^{3-n} & E^{3-n} , & par conséquent des globes homogènes en décrivant des espaces proportionnels à D^{3-n} & E^{3-n} conserveront des vitesses qui seront dans la même raison entr'elles que dans le commencement.

Cor. 4. Et si les globes ne sont pas homogènes , l'espace parcouru par un globe plus dense doit augmenter en raison de sa densité. Car le mouvement est plus grand en raison de la densité lorsque la vitesse est égale , & le temps (par cette Proposition) augmentera en raison du mouvement directement , & l'espace décrit en raison du temps.

Cor. 5. Et si les globes se meuvent dans des milieux différens ; l'espace sera moindre dans un milieu qui résiste plus , en raison

de cette plus grande résistance. Car le temps (par cette Prop.) diminuera en raison de la résistance augmentée , & l'espace en raison du temps.

L E M M E I I.

Le moment de la quantité produite est égal au moment de chacune des racines composantes , multipliées successivement par les exposans de leurs puissances & par leurs coefficients.

J'appelle quantité *produite* toute quantité formée sans addition & sans soustraction , soit arithmétiquement par la multiplication , la division , ou l'extraction des racines de quantités simples , ou de leurs puissances , soit géométriquement par la détermination des produits & des racines , ou des extrêmes & des moyens proportionnels. Telles sont les produits , les quotiens , les racines , les rectangles , les quarrés , les cubes , les racines quarrées , & les racines cubes. Je considère ici ces quantités comme variables , & croissant ou décroissant comme par un mouvement ou flux perpétuel ; & j'entends par *momens* leur incrément ou décrément momentané : en sorte que l'on doit prendre leurs incréments pour les momens additifs ou positifs , & leurs décrémens pour ceux qui sont négatifs ou soustractifs. Prenez garde cependant de ne pas entendre par là des particules finies. Car les particules finies ne sont pas les momens , mais les quantités mêmes produites par ces *momens*. Il faut donc prendre pour particules les principes naissans de quantités finies. On ne considère point dans ce Lemme la grandeur des momens. Mais la première proportion des quantités qui naissent. Et il en sera de même si au lieu des *momens* on emploie les vitesses des incréments & des décrémens (qu'on peut aussi appeller mouvemens , mutations , & fluxions des quantités) ou les quantités finies quelconques proportionnelles à ces vitesses. Quant au coefficient d'une racine quelconque qui produit une quantité , il se trouve en divisant la quantité produite , par cette racine.

Le

Le sens de ce Lemme est donc, que si A , B , C , &c. sont les momens des quantités quelconques croissantes ou décroissantes par un mouvement continu, & que les vitesses proportionnelles à ces changemens soient nommées a , b , c , &c. le moment ou le changement du rectangle produit AB fera $aB + bA$, & le moment du produit ABC fera $aBC + bAC + cAB$:

& les momens des puissances produites A^2 , A^3 , A^4 , $A^{\frac{1}{2}}$, $A^{\frac{3}{2}}$, $A^{\frac{1}{3}}$, $A^{\frac{2}{3}}$, A^{-1} , A^{-2} , &c. $A^{-\frac{1}{2}}$ feront $2aA$, $3aA^2$, $4aA^3$, $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{2}aA^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{3}aA^{-\frac{2}{3}}$, $\frac{2}{3}aA^{-\frac{1}{3}}$, $-aA^{-2}$, $-2aA^{-3}$ & $-\frac{1}{2}aA^{-\frac{3}{2}}$ respectivement. Et généralement, le moment

d'une puissance quelconque $A^{\frac{n}{m}}$ fera $\frac{n}{m} a A^{\frac{n-m}{m}}$, de même le moment de la quantité produite A^2B fera $2aAB + bA^2$ & celui de la quantité produite $A^3B^2C^2$ fera $3aA^2B + C^2 + 4bA^3B + C^2 + 2cA^3B^2C$, celui de la quantité produite $\frac{A^3}{B^2}$ ou A^3B^{-2} fera $3aA^2B^{-2} - 2bA^3B^{-3}$: & ainsi des autres. On démontrera ce Lemme de cette manière.

Cas. 1. Un rectangle quelconque AB augmenté par un mouvement continu, lorsqu'on ôte des côtés A & B la moitié des momens $\frac{1}{2}a$ & $\frac{1}{2}b$, devient $\overline{A - \frac{1}{2}a} \times \overline{B - \frac{1}{2}b}$, ou $AB - \frac{1}{2}aB - \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. Et lorsque les côtés A & B sont augmentés des autres moitiés des momens, il devient $\overline{A + \frac{1}{2}a} \times \overline{B + \frac{1}{2}b}$, ou $AB + \frac{1}{2}aB + \frac{1}{2}bA + \frac{1}{4}ab$. Otant de ce rectangle le premier rectangle, on aura pour reste $aB + bA$, donc l'incrément $aB + bA$ du rectangle fera produit par les incréments entiers a & b des côtés. *C. Q. F. D.*

Cas 2. Supposé que AB soit toujours égal à G , le moment du produit ABC , ou GC (par le cas 1.) fera $gC + cG$, c'est-à-dire, (si on écrit au lieu de G & g , AB , & $aB + bA$) $aBC + bAC + cAB$, il en seroit de même pour des produits plus composés. *C. Q. F. D.*

Cas 3. Supposiez que les produifans A, B, C foient toujours égaux entr'eux ; le moment $aB + bA$ du quarré A^2 ou du rectangle AB fera $2aA$, & le moment $aBC + bAC + cAB$ du cube A^3 ou du produit ABC fera $3aA^2$. Et par le même raisonnement, le moment d'une puissance quelconque A^n est naA^{n-1} . *C. Q. F. D.*

Cas 4. D'où $\frac{1}{A} \times A$ étant $= 1$, son moment qui est A multiplié par le moment de $\frac{1}{A}$ & ajouté avec $\frac{1}{A} \times a$ fera le moment de 1 , c'est-à-dire, $= 0$. Donc le moment de $\frac{1}{A}$ ou de A^{-1} est $-\frac{a}{A^2}$, & généralement, comme $\frac{1}{A^n} \times A^n = 1$ le moment de $\frac{1}{A^n} \times A^n$, ajouté avec $\frac{1}{A^n} \times naA^{n-1}$ fera $= 0$, & par conséquent le moment de $\frac{1}{A^n}$ ou de A^{-n} fera $-\frac{na}{A^{n+1}}$. *C. Q. F. D.*

Cas 5. Et comme $A^{\frac{1}{2}} \times A^{\frac{1}{2}} = A$, le moment de $A^{\frac{1}{2}} \times 2A^{\frac{1}{2}}$ fera $= a$. (par le 3^e. Cas) Donc le moment de $A^{\frac{1}{2}}$ fera $\frac{a}{2A^{\frac{1}{2}}}$ ou $\frac{1}{2}aA^{-\frac{1}{2}}$; & généralement, si on suppose $A^{\frac{m}{n}} = B$, on aura $A^m = B^n$, & par conséquent, $maA^{m-1} = nbB^{n-1}$ & $maA^{m-1} = nbB^{n-1}$ ou $nbA^{-\frac{m}{n}}$, donc $\frac{m}{n}aA^{\frac{m-n}{n}}$ est égal à b ou au moment de $A^{\frac{m}{n}}$. *C. Q. F. D.*

Cas 6. Donc le moment de la quantité quelconque produite $A^m B^n$ est le moment de A^m multiplié par B^n & ajouté avec le moment de la même quantité B^n multiplié par A^m , c'est-à-dire, $maA^{m-1}B^n + nbB^{n-1}A^m$, soit que les exposans m & n foient des nombres entiers ou rompus, positifs ou négatifs. C'est la même chose pour le produit d'un plus grand nombre de puissances. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. De là, dans les quantités continuellement proportion-

nelles, si un terme est donné, les momens des autres termes feront comme ces mêmes termes multipliés par le nombre des intervalles qui sont entr'eux & le terme donné. Soient les quantités A, B, C, D, E, F continuellement proportionnelles; si le terme C est donné, les momens des autres termes feront entr'eux comme $-2 A - B, D, 2 E, 3 F$.

Cor. 2. Et si dans quatre proportionnelles deux moyennes sont données, les momens des extrêmes feront comme ces mêmes extrêmes. Il faut entendre la même chose des côtés d'un rectangle quelconque donné.

Cor. 3. Et si la somme ou la différence de deux quarrés est donnée, les momens de leurs côtés feront réciproquement comme ces côtés.

S C H O L I E.

En expliquant dans une lettre à *D. J. Collins* le 10. Décembre 1672. la méthode des tangentes que je soupçonne être la même que celle de *Slufius* qui ne m'avoit pas encore été communiquée, j'ajoutai, *cela est plutôt un corollaire particulier d'une méthode générale qui s'étend, sans calcul embarrassant, non-seulement à mener des tangentes à des courbes quelconques, soit géométriques, soit mécaniques, ou relatives d'une façon quelconque à des lignes droites ou courbes, mais aussi à résoudre d'autres especes de problèmes très-difficiles touchant les courbures, les quadratures, les rectifications, les centres de gravité des courbes, &c. & elle n'est pas restreinte (comme la méthode de maximis & minimis de Hudde) aux seules équations qui ne contiennent point de quantités irrationnelles. J'ai entremêlé cette méthode de cette autre par laquelle je détermine les racines des équations en les réduisant à des séries infinies. Jusqu'à ces derniers mots, c'est la lettre, mais ces derniers mots sont du Traité que j'avois écrit sur cette matière dès l'année 1671. Les principes de cette Méthode générale sont contenus dans le Lemme précédent.*

PROPOSITION VIII. THÉORÈME VI.

Lorsqu'un corps monte ou descend en ligne droite dans un milieu homogène, la gravité agissant uniformément sur lui, si on partage tout l'espace qu'il a décrit en parties égales, & qu'on trouve (en ajoutant la résistance du milieu à la force de la gravité, lorsque le corps monte, & l'en soustrayant lorsqu'il descend) les forces absolues au commencement de chacune de ces parties égales ; je dis que ces forces absolues seront en progression géométrique.

Fig. 10.

Car soit exprimée la force de la gravité par la ligne donnée AC ; la résistance par la ligne indéfinie AK ; la force absolue lorsque le corps descend par la différence KC ; la vitesse du corps par la ligne AP , qui soit moyenne proportionnelle entre AK & AC , & par conséquent en raison soussoublée de la résistance ; que l'incrément de la résistance dans une particule donnée de temps soit représenté par la petite ligne KL , & l'incrément contemporain de la vitesse par la petite ligne PQ , & du centre C , soit décrite l'hyperbole quelconque BNS ayant pour asymptotes les perpendiculaires CA , CH , & soient élevées les perpendiculaires AB , KN , LO qui la rencontrent en B , N , O . Parce que AK est comme AP^2 , son moment KL sera comme le moment $2APQ$ de AP^2 : c'est-à-dire, comme $AP \times KC$, car l'incrément PQ de la vitesse (2^e Loi du mouvement) est proportionnel à la force génératrice KC . Composant la raison de KL avec celle de KN , on aura le rectangle $KL \times KN$ proportionnel à $AP \times KC \times KN$; c'est-à-dire, à cause du rectangle donné $KC \times KN$, proportionnel à AP ; donc la dernière raison de l'aire hyperbolique $KNLO$ au rectangle $KL \times KN$ lorsque les points K & L coïncident, est la raison d'égalité. Donc cette aire évanouissante est comme AP . Or l'aire totale hyperbolique $ABLO$ est composée des particules $KNOL$ qui sont toujours proportionnelles à la vitesse AP , & par conséquent, l'aire totale est proportionnelle à l'espace décrit avec

cette vitesse. Soit à présent divisée cette aire dans les parties égales $ABMI$, $IMNK$, $KNOL$, &c. les forces absolues AC , IC , KC , LC , &c. seront en progression géométrique. *C.Q.F.D.*

Par le même raisonnement, dans l'ascension du corps, prenant de l'autre côté du point A les aires égales $ABmi$, $imnk$, $knol$, &c. On prouvera que les forces absolues AC , iC , kC , lC , &c. seront continuellement proportionnelles. Donc si dans l'ascension & la descente du corps on prend tous les espaces égaux; toutes les forces absolues lC , kC , iC , AC , KC , LC , &c. seront en proportion continue. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. De là, si l'espace décrit est représenté par l'aire hyperbolique $ABNK$; la force de la gravité, la vitesse du corps, & la résistance du milieu peuvent être représentées par les lignes AC , AP & AK respectivement, & au contraire.

Cor. 2. Et l'exposant de la plus grande vitesse que le corps peut jamais acquérir en descendant à l'infini est la ligne AC .

Cor. 3. Donc, si on connoît la résistance du milieu pour une vitesse donnée, on trouvera la plus grande vitesse en la prenant à cette vitesse donnée dans la raison soufdoublee que la force de la gravité a à cette résistance connue du milieu.

PROPOSITION IX. THÉORÈME VII.

Les choses ci-devant démontrées étant posées, je dis, que si on prend pour un rayon donné de grandeur les tangentes des angles du secteur circulaire & du secteur hyperbolique proportionnelles aux vitesses, le temps entier que le corps emploiera à monter au lieu le plus haut sera comme le secteur du cercle, & tout le temps qu'il emploiera à descendre du lieu le plus haut sera comme le secteur de l'hyperbole.

Soit menée AD perpendiculaire & égale à AC qui exprime la force de la gravité. Du centre D , & du demi diamètre AD soit décrit, tant le quart de cercle $A t E$, que l'hyperbole équilatère AVZ dont l'axe soit AX , le sommet A , & l'asymptote

LIVRE
SECOND.

Fig. 10.

Fig. 11.

tote DC . Soient menées Dp & DP , le secteur circulaire AtD fera comme tout le temps employé à monter au lieu le plus haut; & le secteur hyperbolique ATD fera comme tout le temps employé à descendre du lieu le plus haut: pourvu cependant que les tangentes Ap , AP des secteurs soient comme les vitesses.

Cas 1. Soit tirée Dvq qui coupe les momens du secteur ADt & du triangle ADp , ou les particules très-petites tDv , & qDp décrites en même temps. Comme ces particules, à cause de l'angle commun D , sont en raison doublée des côtés, la particule tDv fera comme $\frac{qDp \times tD^2}{pD^2}$, c'est-à-dire, à cause de la donnée tD , comme $\frac{qDp}{pD^2}$. Mais pD^2 est $AD^2 + Ap^2$, c'est-à-dire, $AD^2 + AD \times Ak$, ou $AD \times Ck$; & qDp est $\frac{1}{2} AD \times pq$. Donc la particule tDv du secteur est comme $\frac{pq}{Ck}$, c'est-à-dire, comme le très-petit décrement pq de la vitesse directement, & la force Ck qui diminue la vitesse inversement; & par conséquent, comme la particule du temps qui répond au décrement de la vitesse. D'où en composant, la somme de toutes les particules tDv dans le secteur ADt est comme la somme des petites parties du temps qui répondent à chacune des particules perdues pq de la vitesse décroissante Ap , jusqu'à ce que la vitesse étant diminuée à l'infini, elle s'évanouisse; c'est-à-dire, que le secteur total ADt est comme tout le temps employé à monter au lieu le plus haut. *C. Q. F. D.*

Cas 2. Soit tirée DQV qui coupe les très-petites particules TDV & PDQ tant du secteur DAV que du triangle DAQ ; ces particules feront l'une à l'autre comme DT^2 à DP^2 , c'est-à-dire, (si TX & AP sont parallèles) comme DX^2 à DA^2 ou TX^2 à AP^2 , & en divisant, comme $DX^2 - TX^2$ à $DA^2 - AP^2$. Mais par la nature de l'hyperbole,

$DX^2 - TX^2$ est AD^2 , & par l'hypothèse, AP^2 est $AD \times AK$. Donc les particules sont entr'elles comme AD^2 à $AD^2 - AD \times AK$, c'est-à-dire, comme AD à $AD - AK$ ou AC à CK . Donc

la petite partie TDV du secteur est $\frac{PDQ \times AC}{CK}$; & par

conséquent, à cause des données AC & AD , comme $\frac{PQ}{CK}$,

c'est-à-dire, comme l'incrément de la vitesse directement; & comme l'incrément de la force génératrice inversement, & par conséquent comme la particule de temps qui répond à l'incrément. D'où en composant, la somme des particules de temps pendant lesquelles toutes les particules PQ de la vitesse AP sont produites, est comme la somme des particules du secteur ATD , c'est-à-dire, que le temps total est comme tout ce secteur. *C.Q.F.D.*

Cor. 1. De là, en supposant que AB soit la quatrième partie de AC , l'espace que le corps décrit en tombant pendant un temps quelconque sera à l'espace que le corps avec la plus grande vitesse AC pourroit décrire en avançant uniformément pendant le même temps, comme l'aire $ABNK$, qui exprime l'espace décrit en tombant, est à l'aire ATD par laquelle le temps est exprimé. Car puisque $AC:AP::AP:AK$, on aura (Cor. 1. du Lemme 2. de ce livre) $LK:PQ::2AK:AP$, c'est-à-dire, $::2AP:AC$, & de là on tire, $LK:\frac{1}{2}PQ::AP:\frac{1}{4}AC$ ou AB ; mais $KN:AC$ ou $AD::AB:CK$, & par conséquent, $LNKO:DPQ::AP:CK$. De plus, on avoit $DPQ:DTV::CK:AC$. Donc $LKNO:DTV::AP:AC$; c'est-à-dire, comme la vitesse du corps qui tombe, à la plus grande vitesse que le corps peut acquérir en tombant. Or comme les momens $LKNO$ & DTV des aires $ABNK$ & ATD sont proportionnels aux vitesses, toutes les parties de ces aires produites en même temps seront comme les espaces décrits en même temps, donc les aires totales $ABNK$, ATD décrites depuis le commencement du mouvement seront comme les

LIVRE
SECOND.

Fig. 11.

espaces entiers décrits depuis que le corps a commencé à descendre. *C. Q. F. D.*

Fig. 11.

Cor. 2. Il en est de même de l'espace décrit en remontant, c'est-à-dire, que tout cet espace est à l'espace décrit avec la vitesse uniforme AC dans le même temps, comme l'aire $ABnk$ est au secteur ADt .

Cor. 3. La vitesse du corps qui tombe pendant le temps ATD est à la vitesse qu'il acquéroit dans le même temps dans un espace non résistant, comme le triangle APD est au secteur hyperbolique ATD . Car la vitesse dans un milieu non résistant seroit comme le temps ATD , & dans un milieu résistant elle est comme AP , c'est-à-dire, comme le triangle APD . Or les vitesses au commencement de la chute sont égales entr'elles, donc elles sont comme les aires ATD , APD .

Cor. 4. Par le même raisonnement, la vitesse dans l'ascension est à la vitesse avec laquelle le corps peut perdre tout son mouvement en remontant dans le même temps, dans un espace non résistant, comme le triangle APD est au secteur circulaire AtD ; ou comme la droite Ap à l'aire At .

Cor. 5. Le temps dans lequel le corps en tombant dans un milieu résistant peut acquérir la vitesse AP , est donc au temps dans lequel il peut acquérir la plus grande vitesse AC en tombant dans un milieu non résistant, comme le secteur ADT est au triangle ADC ; & le temps pendant lequel il peut perdre la vitesse AP en remontant dans un milieu résistant, est au temps dans lequel il peut perdre la même vitesse en remontant dans un milieu non résistant, comme l'arc At est à sa tangente Ap .

Cor. 6. De là, le temps étant donné, on a l'espace décrit dans l'ascension ou dans la descension. Car si le corps descend à l'infini la plus grande vitesse est donnée par les *Cor. 2.* & *3.* du *Théor. 6.* de ce *Liv. 2.* & par-là on a le temps dans lequel il peut acquérir cette vitesse en tombant dans un espace non résistant

résistant. Prenant donc le secteur ADT ou ADt au triangle ADC dans la raison du temps donné au temps déjà trouvé, on aura tant la vitesse AP ou Ap , que l'aire $ABNK$ ou $ABnk$ qui est au secteur ADT ou ADt comme l'espace cherché est à l'espace qui auroit pu être décrit uniformément dans un temps donné avec cette plus grande vitesse trouvée.

Cor. 7. Et réciproquement, l'espace $ABnk$ ou $ABNK$ décrit pendant l'ascension ou la descente étant donné, le temps ADt ou ADT le fera aussi.

PROPOSITION X. PROBLÈME III.

La force uniforme de la gravité tendant directement au plan de l'horizon, & la résistance étant comme la densité du milieu & le carré de la vitesse conjointement; on demande à chacun des lieux, tant la densité du milieu nécessaire pour que le corps décrive une courbe quelconque donnée, que la vitesse du corps & la résistance du milieu à chacun des lieux de cette courbe.

Que PQ soit le plan perpendiculaire au plan de la figure; $PFHQ$ une ligne courbe rencontrant ce plan en P & Q ; G, H, I, K quatre lieux du corps dans cette courbe en allant de F en Q ; & GB, HC, ID, KE quatre ordonnées parallèles abaissées de ces points sur la ligne horizontale PQ , & s'appuyant sur cette ligne aux points B, C, D, E ; les distances BC, CD, DE de ces ordonnées étant égales entr'elles. Des points G & H soient tirées les droites GL, HN tangentes de la courbe en G & H , & rencontrant en L & N les ordonnées CH, DI prolongées en enhaut, & soit achevé le parallélogramme $HCDM$; les temps dans lesquels le corps décrit les arcs GH, HI seront en raison soudoublée des hauteurs LH, IN que le corps peut parcourir dans ces temps en tombant par ces tangentes; & les vitesses seront comme les longueurs parcourues GH, HI directement, & comme les temps inversement. Qu'on exprime les temps par T & t , & les vitesses par

LIVRE
SECOND.

Fig. 11.

Fig. 12.

$\frac{GH}{T}$ & $\frac{HI}{t}$ le décrement de la vitesse pendant le temps t fera $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t}$. Ce décrement vient de la résistance qui retarde le corps, & de la gravité qui l'accélère. La gravité produit dans un corps qui parcourt en tombant l'espace NI une vitesse par laquelle le corps pourroit parcourir le double de cet espace dans le même temps, comme Galilée l'a démontré; c'est-à-dire, la vitesse $\frac{2NI}{t}$; mais dans le corps qui parcourt l'arc HI elle augmente seulement cet arc de la longueur $HI - HN$ ou $\frac{MI \times NI}{HI}$; elle produit donc seulement alors la vitesse $\frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Ajoutant cette vitesse au décrement dont on a parlé, on aura le décrement de la vitesse causé par la seule résistance, c'est-à-dire, $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$. Donc, puisque la gravité produit dans le même temps dans le corps qui tombe la vitesse $\frac{2NI}{t}$; la résistance fera à la gravité comme $\frac{GH}{T} - \frac{HI}{t} + \frac{2MI \times NI}{t \times HI}$ à $\frac{2NI}{t}$, ou comme $\frac{t \times GH}{T} - HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$ à $2NI$.

Ecrivant à présent, au lieu des abscisses CB, CD, DE , $-o, o, 2o$; pour l'ordonnée CH, P ; & pour MI la série quelconque $Qo + Roo + So^3 + \&c.$ Tous les termes de cette série après le premier, c'est-à-dire, $Roo^2 + So^3 + \&c.$ seront NI ; & les ordonnées DI, EK , & BG , seront $P - Qo - Roo - So^3 - \&c.$ $P - 2Qo - 4Roo - 8So^3 - \&c.$ & $P + Qo - Roo + So^3 - \&c.$ respectivement. Et en quant les différences des ordonnées $BG - CH$ & $CH - DI$ & ajoutant à ces quarrés les quarrés de BC, CD , on aura les

quarrés $oo + QQoo - 2QRO^3 + \&c.$ & $oo + QQoo + 2QRO^3 + \&c.$ des arcs GH, HI , dont les racines $o\sqrt{1+QQ}$ & $\frac{QROo}{\sqrt{1+QQ}}$ & $o\sqrt{1+QQ} + \frac{QROo}{\sqrt{1+QQ}}$ sont les arcs GH &

HI . De plus, si on soustrait de l'ordonnée CH la demi-somme des ordonnées BG & DI , & de l'ordonnée DI la demi-somme des ordonnées CH & EK , il restera les flèches Ro & $Ro + 3So$ des arcs GI & HK , lesquelles sont proportionnelles aux petites lignes LH & NI , & par conséquent en raison doublée des temps infiniment petits T & t . Donc la raison de $\frac{t}{T}$ est $\sqrt{\frac{R+3So}{R}}$ ou $\frac{R+\frac{3}{2}So}{R}$; & $\frac{t \times GH}{T} = HI + \frac{2MI \times NI}{HI}$, & en mettant au lieu de $\frac{t}{T}$, GH, HI, MI & NI leurs va-

leurs trouvées, on aura $\frac{3So}{2R} \sqrt{1+QQ}$, & comme $2NI$ est $2Ro$, la résistance sera alors à la gravité comme $\frac{3So}{2R} \sqrt{1+QQ}$ à $2Ro$, c'est-à-dire, comme $3S\sqrt{1+QQ}$ à $4RR$.

Cette vitesse est celle avec laquelle le corps en partant d'un lieu quelconque H , selon la tangente HN , décrit la parabole dont le diamètre est HC & le paramètre $\frac{HN^2}{NI}$ ou $\frac{1+QQ}{R}$, & avec laquelle il pourroit se mouvoir dans le vuide & décrire la même courbe.

Et la résistance étant comme la densité du milieu, & le quarré de la vitesse conjointement, la densité du milieu sera comme la résistance directement, & le quarré de la vitesse inversement, c'est-à-dire, comme $\frac{3S\sqrt{1+QQ}}{4RR}$ directement & $\frac{1+QQ}{R}$ inversement, ou ce qui revient au même, comme

$$\frac{S}{R\sqrt{1+QQ}} \quad C. Q. F. T.$$

Cor. 1. Si on prolonge la tangente HN des deux côtés, en sorte qu'elle rencontre une ordonnée quelconque AF en T ,

$\frac{HT}{AC}$ sera égale à $\sqrt{1+QQ}$, donc on peut l'écrire dans les calculs précédens au lieu de $\sqrt{1+QQ}$. C'est pourquoi la résistance sera à la gravité, comme $3S \times HT$ à $4RR \times AC$, la vitesse comme $\frac{HT}{AC\sqrt{R}}$ & la densité du milieu comme $\frac{S \times AC}{R \times HT}$.

Cor. 2. Et delà; si la ligne courbe $PFHQ$ est exprimée suivant l'usage par la relation entre la base ou l'abscisse AC & l'appliquée CH , & que la valeur de l'appliquée soit transformée en une série convergente: le problème se résoudra très-facilement par les premiers termes de la série comme dans les exemples suivans.

Exemple 1. Que la ligne $PFHQ$ soit un demi-cercle décrit sur le diamètre PQ , & qu'on demande la densité du milieu nécessaire pour que le projectile se meuve dans cette ligne.

Que le diamètre PQ soit coupé en deux également au point A ; & qu'on nomme AQ , n ; AC , a ; CH , e ; & CD , o ; & on aura DI^2 ou $AQ^2 - AD^2 = nn - aa - 2ao - oo$, ou, $ee - 2ao - oo$, & la racine étant extraite par notre méthode on aura, $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{oo}{2e} - \frac{aao}{2e^3} - \frac{ao^3}{2e^3} - \frac{a^3o^3}{2e^5} - \&c.$ & écrivant nn au lieu de $ee + aa$, on aura $DI = e - \frac{ao}{e} - \frac{nnoo}{2e^3} - \frac{annoo^3}{2e^5} - \&c.$

Je distingue en cette sorte les séries de l'espèce de la précédente en termes successifs. J'appelle *premier terme* celui dans lequel la quantité infiniment petite o ne se trouve point; *second terme*, celui dans lequel cette quantité est d'une dimension; *troisième terme*, celui dans lequel elle en a deux; *quatrième terme*, celui où elle en a trois, & ainsi à l'infini. Le premier terme qui est ici,

e , représentera toujours la longueur de l'ordonnée CH qui s'appuie sur le commencement de la quantité indéfinie o .

LIVRE.
SECOND.

Le second terme qui est ici $\frac{ao}{e}$ représentera la différence entre CH & DN , c'est-à-dire, la petite ligne MN , qui est retranchée en achevant le parallélograme $HCDM$, & qui par conséquent détermine toujours la position de la tangente HN , comme dans ce cas, en prenant MN à HM comme $\frac{ao}{e}$ est à o , ou, comme a est à e .

Le troisième terme qui est ici $\frac{nnno}{2e^3}$ représentera la petite ligne IN qui est comprise entre la tangente & la courbe, & qui par conséquent détermine l'angle de contact IHN , ou la courbure que la ligne courbe a au point H . Si cette petite ligne IN est de grandeur finie, elle fera représentée par le troisième terme & par tous ceux qui le suivent à l'infini, mais si cette petite ligne diminue à l'infini, les termes suivans deviendront infiniment plus petits que le troisième, & peuvent par conséquent être négligés.

Le quatrième terme détermine la variation de la courbure ; le cinquième la variation de la variation, & ainsi de suite. D'où l'on voit en passant l'usage de ces séries dans la solution des problèmes qui dépendent des tangentes & de la courbure des courbes.

En comparant la série $e - \frac{ao}{e} - \frac{nnno}{2e^3} - \frac{annno^3}{2e^5}$, - &c. avec la série $P - Qo - Roo - So^3 -$ &c. & écrivant ensuite pour P, Q, R & $S, e, \frac{a}{e}, \frac{nn}{2e^3}$ & $\frac{ann}{2e^5}$ & au lieu de $\sqrt{1 \times QQ}$, $\sqrt{1 + \frac{aa}{ee}}$ ou $\frac{n}{e}$, on aura la densité du milieu comme $\frac{a}{ne}$; c'est-à-dire, (à cause que n est donnée) comme $\frac{a}{e}$, ou $\frac{AC}{CH}$,

Fig. 12.

ou ce qui revient au même, comme cette longueur HT de la tangente qui est terminée par le demi diamètre AF perpendiculaire sur PQ : & la résistance sera à la gravité comme $3a$ à $2n$, c'est-à-dire, comme $3AC$ au diamètre PQ du cercle : quant à la vitesse elle sera comme \sqrt{CH} . C'est pourquoi, si le corps part du lieu F dans une ligne parallèle à PQ avec une vitesse suffisante, & que la densité du milieu à chacun des lieux H soit comme la longueur HT de la tangente, & que la résistance dans quelque lieu H soit à la force de la gravité comme $3AC$ à PQ , ce corps décrira le quart de cercle FQH . C. Q. F. T.

Mais si ce même corps eût été porté du lieu P selon une ligne perpendiculaire à PQ , & qu'il eût commencé à se mouvoir dans l'arc du demi-cercle PFQ , il auroit fallu prendre AC , ou a de l'autre côté du centre A , & par conséquent il eût fallu changer son signe & écrire $-a$, au lieu de $+a$. Ce qui donneroit la densité du milieu comme $-\frac{a}{e}$, mais la nature n'admet point de densité négative, c'est-à-dire, qui accélère le mouvement : & par conséquent il ne se peut faire que le corps en montant du point P décrive l'arc de cercle PF , car il faudroit qu'il fut accéléré par un milieu qui le portât en haut, au lieu d'être retardé par un milieu résistant.

Fig. 13.

Exemple 2. Que la ligne PFQ soit une parabole ayant son axe AF perpendiculaire à l'horison PQ & qu'on cherche la densité du milieu nécessaire pour que le projectile se meuve dans cette ligne.

Par la nature de la parabole, le rectangle PDQ est égal au rectangle sous l'ordonnée DI & une ligne droite constante ; c'est-à-dire, (si on appelle cette ligne b ; la ligne Pc , a ; PQ , c ; CH , e ; & CD , o ;) que le rectangle $a+o \times c-a-o$, ou $ac - aa - 2ao + co - oo$ est égal au rectangle $b \times DI$. Donc $DI = \frac{ac - aa}{b} + \frac{c - 2a}{b} \times o - \frac{oo}{b}$. Dans cette suite, le second terme

$\frac{c-2a}{b} \times o$ représente $Q o$ & le troisième terme $\frac{o o}{b}$ représente

$R o o$. Or, comme il n'y a pas d'avantage de termes, le coefficient S du quatrième doit s'évanouir, & par conséquent la

quantité $\frac{S}{R\sqrt{1+Q Q}}$ à laquelle la densité du milieu est proportionnelle, fera nulle; donc, lorsque la densité du milieu est nulle le projectile doit se mouvoir dans une parabole comme *Galilée* l'a démontré autrefois. C. Q. F. T.

Exemple 3. Que la ligne AGK soit une hyperbole dont l'asymptote NX soit perpendiculaire au plan horizontal AK ; & qu'on cherche la densité du milieu nécessaire pour que le projectile se meuve dans cette ligne.

Soit MX l'autre asymptote qui rencontre en V l'ordonnée DG prolongée; & par la nature de l'hyperbole, le rectangle $XV \times VG$ est donné. Mais la raison de DN à VX est aussi donnée, & par conséquent le rectangle $DN \times VG$ l'est aussi. Soit bb ce rectangle: après avoir achevé le parallélogramme $DNXZ$; qu'on nomme BN , a ; BD , o ; NX , c ; & que la raison donnée de VZ à ZX ou DN soit $\frac{m}{n}$. On aura $DN = a - o$, $VG =$

$\frac{bb}{a-o}$, $VZ = \frac{m}{n} \frac{bb}{a-o}$, & GD ou $NX - VZ - VG = c - \frac{m}{n} a + \frac{m}{n} o - \frac{bb}{a-o}$. Que le terme $\frac{bb}{a-o}$ soit transformé dans la

série convergente $\frac{bb}{a} + \frac{bb}{aa} o + \frac{bb}{a^3} o o + \frac{bb}{a^4} o^3$ &c. & on aura

$GD = c - \frac{m}{n} a - \frac{bb}{a} + \frac{m}{n} o - \frac{bb}{aa} o - \frac{bb}{a^3} o^2 - \frac{bb}{a^4} o^3$ &c. Le se-

cond terme $\frac{m}{n} o - \frac{bb}{aa} o$ de cette série représentera $Q o$, le

troisième $\frac{bb}{a^3} o^2$, en changeant le signe, représentera $R o^2$, &

le quatrième $\frac{bb}{a^4} o^3$, en changeant aussi le signe, représentera $S o^3$,

LIVRE
SECOND.

Fig. 13.

Fig. 14.

Fig. 14.

& selon la regle précédente, les coefficients $\frac{m}{n} - \frac{bb}{aa}, \frac{bb}{a^3}$,

& $\frac{bb}{a^4}$ feront les quantités qu'il faudra substituer dans la formule précédente à la place des quantités Q, R & S . La substitution faite, on aura la densité du milieu comme $\frac{bb}{a^4}$

$$\frac{\frac{bb}{a^4}}{\frac{bb}{a^3} \sqrt{1 + \frac{mm}{nn} - \frac{2mbb}{naa} + \frac{b^4}{a^4}}} \text{ ou } \frac{1}{\sqrt{aa + \frac{mm}{nn} aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}}}$$

c'est-à-dire, (si on prend sur VZ la ligne $VY = VG$) comme $\frac{1}{XY}$, car aa & $\frac{mm}{nn} aa - \frac{2mbb}{n} + \frac{b^4}{aa}$ sont les quarrés de XZ & de ZY , & on trouvera que la résistance est à la gravité dans la raison de $3XY$ à $2YG$; & c'est la même vitesse avec laquelle le corps décriroit la parabole dont le sommet feroit G , le diametre DG , & le parametre $\frac{XY^2}{VG}$. C'est pour-

quoi, supposant que les densités du milieu dans chacun des lieux G , soient réciproquement comme les distances XY , & que la résistance dans quelque lieu G soit à la gravité comme $3XY$ à $2YG$; le corps partant de A avec la vitesse nécessaire décrira cette hyperbole AGK . C. Q. F. T.

Exemple 4. Supposons en général que la ligne AGK soit une hyperbole dont le centre soit X , les asymptotes MX, NX , & qu'elle soit décrite par cette Loi, qu'ayant fait le rectangle $XZDN$ dont le côté ZD coupe l'hyperbole en G & son asymptote en V , VG fera réciproquement comme ZX ou comme quelque puissance DN^n de DN dont l'exposant sera le nombre n : & qu'on cherche la densité du milieu nécessaire pour que le projectile décrive cette courbe.

Au lieu de BN, BD, NX , écrivez A, O, C respectivement, & soit $VZ: XZ$ ou $DN:: d:e$, & on aura $VG = \frac{bb}{DN^n}$ &

$$DN = A - O, VG = \frac{bb}{A - O^n}, VZ = \frac{d}{e} \overline{A - O}, \& GD \text{ ou}$$

 LIVRE
SECOND.

$$NX - VZ - VG = C - \frac{d}{e} A + \frac{d}{e} O - \frac{bb}{A - O^n}. \text{ Soit transfor-}$$

Fig. 14.

$$\text{mé } \frac{bb}{A - O^n} \text{ dans la série infinie } \frac{bb}{A^n} + \frac{nbb}{A^{n+1}} O + \frac{nn+n}{2A^{n+2}}$$

$$bbO^2 + \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}} bbO^3, \&c. \& \text{ on aura } GD = C -$$

$$\frac{d}{e} A - \frac{bb}{A^n} + \frac{d}{e} O - \frac{nbb}{A^{n+1}} O - \frac{nn+n}{2A^{n+2}} bbO^2 -$$

$$+ \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}} bbO^3, \&c. \text{ Et le second terme } \frac{d}{e} O - \frac{nbb}{A^{n+1}} O$$

$$\text{de cette série, représentera } QO, \text{ le troisieme } \frac{nn+n}{2A^{n+2}} bbO^2,$$

$$\text{représentera } RO^2, \text{ le quatrieme } \frac{n^3+3nn+2n}{6A^{n+3}} bbO^3 \text{ représentera}$$

$$SO^3. \text{ Delà, la densité du milieu } \frac{S}{RV_{1+QQ}} \text{ deviendra dans un lieu}$$

$$\text{quelconque } G \frac{n+2}{3\sqrt{A^2 + \frac{dd}{ee} A^2 - \frac{2dnbb}{eA^n} A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}}}$$

Donc si on prend sur VZ la ligne $VY = n \times VG$, cette densité sera réciproquement comme XY . Car A^2 & $\frac{dd}{ee} A^2 -$

$$\frac{2dnbb}{eA^n} A + \frac{nnb^4}{A^{2n}}, \text{ sont les quarrés de } XZ \& \text{ de } ZY. \text{ Mais}$$

la résistance dans le même lieu G est à la gravité comme $3S \times \frac{XY}{A}$ à $4RR$, c'est-à-dire, comme XY à $\frac{2nn+2n}{n+2} VG$. Et

la vitesse dans le même lieu G est la même avec laquelle le corps étant jeté décrirait une parabole dont le sommet seroit

$$G, \text{ le diamètre } GD, \& \text{ le parametre } \frac{1+QQ}{R} \text{ ou } \frac{2XY^2}{nn+n \times VG}$$

C. Q. F. T.

Fig. 12.

De même qu'on a trouvé dans le Cor. 1. la densité du milieu comme $\frac{S \times AC}{R \times HT}$, si on suppose la résistance comme une puissance quelconque n de la vitesse V , on aura la densité du milieu comme $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}} \times \left(\frac{AC}{HT}\right)^{n-1}$. Et par conséquent, si on

peut trouver une courbe telle que la quantité $\frac{S}{R^{\frac{4-n}{2}}}$ soit proportionnelle à $\left(\frac{HT}{AC}\right)^{n-1}$ ou bien que la quantité $\frac{S^2}{R^{4-n}}$

soit proportionnelle à $(1 + QQ)^{n-1}$: le corps décrira cette courbe dans un milieu uniforme dont la résistance sera comme la puissance n de la vitesse, c'est-à-dire, comme V^n . Mais revenons à des courbes plus simples.

Fig. 14.

Comme le corps ne décrit une parabole que dans un milieu non résistant, & qu'il ne décrit les hyperboles dont nous venons de parler qu'en éprouvant une résistance continuelle : il est clair que la ligne que le projectile décrit dans un milieu qui résiste uniformément approche plus de ces hyperboles que de la parabole. Cette ligne est donc du genre hyperbolique, mais c'est une espèce d'hyperbole qui est plus éloignée des asymptotes vers le sommet, & qui dans les parties très-éloignées s'en approche davantage que les hyperboles dont j'ai parlé ici. Mais cependant la différence qui est entr'elles n'est pas assez grande pour qu'elles ne puissent pas être prises les unes pour les autres sans inconvénient dans la pratique : & peut-être sont-elles plus utiles que les hyperboles décrites avec plus de soin, & plus composées.

Voici comment on peut en faire usage.

Soit achevé le parallélogramme $XYGT$; & que la droite

GT touche l'hyperbole en G , la densité du milieu en G est donc réciproquement comme la tangente GT , la vitesse dans le même milieu comme $\sqrt{\frac{GT^2}{GV}}$ & la résistance à la force de la

gravité comme GT à $\frac{2nn+2n}{n+2} \times GV$.

Donc, si le corps jetté du lieu A dans la droite AH décrit l'hyperbole AGK , & que AH prolongée rencontre l'asymptote NX en H ; tirant AI parallèle à cette asymptote, & qui rencontre l'autre asymptote MX en I , la densité du milieu en A sera réciproquement comme AH , & la vitesse du corps comme $\sqrt{\frac{AH^2}{AI}}$, & la résistance dans le même lieu sera à la

gravité comme AH à $\frac{2nn+2n}{n+2} \times AI$: d'où on tire les règles suivantes.

Regle 1. Si la densité du milieu reste la même qu'en A , ainsi que la vitesse avec laquelle le corps a été jetté, & qu'on change l'angle NAH ; les longueurs AH , AI , HX resteront les mêmes. Donc, si on trouve ces longueurs dans quelque cas; on pourra déterminer ensuite très-aisément l'hyperbole pour un angle quelconque donné NAH .

Regle 2. Si la densité du milieu & l'angle NAH restent les mêmes qu'en A , & que la vitesse avec laquelle le corps a été jetté change, la longueur AH restera la même, mais AI changera en raison doublée réciproque de la vitesse.

Regle 3. Si la vitesse du corps, l'angle NAH & la gravité accélératrice restent les mêmes qu'en A , & que la proportion de la résistance en A à la gravité motrice augmente dans une raison quelconque; la proportion de AH à AI augmentera dans la même raison, le parametre de la parabole dont on a parlé restant le même, ainsi que la longueur $\frac{AH^2}{AI}$ qui lui est proportionnelle: & par conséquent, AH diminuera dans la même

LIVRE
SECOND.

Fig. 14.

Fig. 15.

raison, & AI diminuera dans cette raison doublée. Mais la proportion de la résistance au poids augmentera, si la gravité spécifique est moindre sous un égal volume, ou si la densité du milieu est plus grande, ou bien la résistance diminuera en une moindre raison que le poids, le volume étant diminué.

Règle 4. Comme la densité du milieu près du sommet de l'hyperbole est plus grande qu'au lieu A ; pour avoir la densité moyenne, il faut trouver la raison de la plus petite des tangentes GT à la tangente AH , & augmenter la densité en A en une raison un peu plus grande que la demi-somme de ces tangentes à la plus petite de ces tangentes GT .

Règle 5. Si les longueurs AH , AI sont données, & qu'on veuille décrire la figure AGK : prolongez HN en X , en sorte que $HX:AI::n+1:1$, & décrivez par le point A une hyperbole dont les asymptotes soient MX , NX & le centre X , & qui ait cette propriété que AI soit à une ligne quelconque VG comme XV^n est à XI^n .

Règle 6. Plus le nombre n est grand, plus les hyperboles décrites par le corps en montant du lieu A sont exactes, & moins elles sont exactes lorsqu'il descend vers K ; & au contraire. L'hyperbole conique tient le milieu, & d'ailleurs est la plus simple. Donc, si l'hyperbole est de ce genre, & qu'on cherche le point K où le corps projeté tombe sur une ligne quelconque AN qui passe par le point A : il faudra prolonger AN en sorte qu'elle rencontre les asymptotes MX , NX en M & en N & prendre $NK=AM$.

Règle 7. Et de là on tire une manière très-aisée de déterminer cette hyperbole par les Phénomènes. Car, soient jetés deux corps semblables & égaux, avec la même vitesse, sous des angles divers HAK , hAk , & qu'ils tombent dans le plan de l'horizon en K & en k ; & soit trouvée par observation la proportion de AK à Ak que je suppose ici celle de d à e . Après avoir élevé une perpendiculaire AI d'une longueur quelconque, prenez à volonté la longueur AH ou Ah , & mesurez ensuite gra-

phiquement les longueurs AK , Ak par la règle 6. Si la raison de AK à Ak est la même que celle de d à e , la longueur AH aura été prise exactement. Si cette raison est moindre, prenez sur la droite indéfinie SM la longueur SM égale à la longueur prise AH , & élevez la perpendiculaire MN égale à la différence des raisons $\frac{AK}{Ak} - \frac{d}{e}$ multipliée par une droite quelconque

LIVRE
SECOND.

Fig. 15.

donnée. Ayant pris plusieurs longueurs AH , on trouvera par la même méthode autant de points N , & par tous ces points on pourra tracer une courbe régulière $NNXN$ qui coupe la droite SM en X . Soit prise enfin AH égale à l'abscisse SX , & on trouvera de nouveau la longueur AK ; & les longueurs, qui seront à la longueur prise AI & à cette dernière AH comme la longueur AK connue par expérience à la longueur AK trouvée en dernier lieu, seront les vraies longueurs AI , & AH qu'il falloit trouver. Or ces longueurs étant données, la résistance du milieu au lieu A sera donnée aussi, car elle est à la force de la gravité comme AH à $2 AI$. Augmentant la densité du milieu par la règle 4, la résistance qu'on vient de trouver en deviendra plus exacte si on l'augmente dans cette même raison.

Fig. 16.

Fig. 15.

Règle 3. Les longueurs AH , HX étant trouvées; si on cherche la position de la droite AH selon laquelle le projectile ayant été jeté avec une vitesse donnée, tombe en un point quelconque K : il faudra élever aux points A & K les droites AC , KF perpendiculaires à l'horison, desquelles AC tende en enbas, & soit égale à AI ou $\frac{1}{2} HX$. On tracera ensuite l'hyperbole dont les asymptotes sont AK , KF , & dont la conjuguée passe par le point C , du centre A & de l'intervalle AH on décrira un cercle qui coupe cette hyperbole au point H ; & le projectile jeté selon la ligne droite AH tombera sur le point K . *C. Q. F. T.*

Car le point H , à cause de la longueur donnée AH , fera

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. 15.

quelque part sur le cercle décrit. Tirant CH qui rencontre AK & KF , la première en E , & l'autre en F ; à cause des parallèles CH , MX , & des égales AC , AI , on aura $AE = AM = KN$ par conséquent. Mais $CE : AE :: FH : KN$, donc $CE = FH$. Le point H tombe donc sur l'hyperbole dont les asymptotes sont AK , KF , & dont la conjuguée passe par le point C , donc ce point se trouvera dans la commune intersection du cercle décrit & de cette hyperbole. *C. Q. F. D.*

Il faut remarquer de plus, que cette construction se fait de même, soit que la droite AKN soit parallèle à l'horizon soit qu'elle lui soit inclinée sous un angle quelconque : & que les deux intersections H & H forment deux angles NAH , NAH ; & que dans la pratique il suffit de décrire une fois le cercle, & d'appliquer ensuite la règle infinie CH de telle sorte au point C que sa partie FH comprise entre la droite FK & le cercle soit égale à sa partie CE comprise entre le point C & la droite AK .

Fig. 17.

Ce qu'on a dit des hyperboles peut s'appliquer facilement aux paraboles. Car si $XAGK$ est une parabole, que la droite XV touche au sommet X , & que les ordonnées IA , VG soient comme les puissances quelconques XI^n , XV^n des abscisses XI & XV , soient tirées XT , GT , AH , desquelles XT soit parallèle à VG & que GT , AH touchent la parabole en G , & A ; le corps, étant projeté avec la vitesse nécessaire d'un lieu quelconque A selon une droite AH prolongée, décrira cette parabole, si la densité du milieu à chacun des lieux G est réciproquement comme la tangente GT . La vitesse en G fera celle avec laquelle le corps décrirait, dans un espace non résistant, la parabole conique dont le sommet serait G , le diamètre VG la ligne prolongée en enbas & le paramètre $\frac{2GT^2}{nn-n \times VG}$. Quant à la résistance en G elle sera à la force de la gravité comme GT à $\frac{2nn-2n}{n-2} \times VG$. D'où, si NAK est

la ligne horizontale, & que la densité en A demeurant la même, ainsi que la vitesse avec laquelle le corps a été jetté, l'angle NAH change d'une façon quelconque; les longueurs AH , AI , XH demeureront les mêmes, & de là le sommet X de la parabole sera donné, ainsi que la position de la droite XI , prenant donc $VG:IA::XV^2:XI^2$, on aura tous les points G de la parabole par lesquels le projectile passera.

LIVRE
SECOND.

Fig. 17.

TROISIÈME SECTION.

Du Mouvement des Corps qui éprouvent des résistances qui sont en partie en raison de la vitesse, & en partie en raison doublée de cette même vitesse.

PROPOSITION XI. THÉORÈME VIII.

Si un corps éprouve une résistance qui soit en partie comme sa vitesse, & en partie en raison doublée de cette vitesse, que ce corps se meuve dans un milieu homogène par la seule force qui lui a été imprimée, & qu'on prenne les temps en progression arithmétique; les quantités réciproquement proportionnelles aux vitesses seront en progression géométrique, la quantité quelconque dont elles augmentent étant donnée.

Du centre C soit décrite l'hyperbole BEe qui ait pour asymptotes les perpendiculaires $CADd$, & CH , que les lignes AB , DE , de soient parallèles à l'asymptote CH . Que les points A & G soient donnés sur l'asymptote CD ; si le temps est représenté par l'aire hyperbolique $ABED$ qui croît uniformément, je dis que la vitesse peut être représentée par la longueur DF dont la réciproque GD ajoutée avec l'ordonnée CG compose la longueur CD qui croît en progression géométrique.

Fig. 18.

Soit la petite aire $DEe d$ l'incrément donné infiniment petit du

temps, Dd sera réciproquement comme DE , & par conséquent directement comme CD . Mais le décrement de $\frac{1}{GD}$ qui est (par le Lemme 2. de ce Liv.) $\frac{Dd}{GD^2}$ sera proportionnel à $\frac{CD}{GD^2}$ ou à $\frac{CG+GD}{GD^2}$, c'est-à-dire, à $\frac{1}{GD} \times \frac{CG}{GD}$. Donc pendant le temps $ABDE$, qui croît uniformément par l'addition des petites particules données $EDde$, $\frac{1}{GD}$ décroît dans la même raison que la vitesse. Car le décrement de la vitesse est comme la résistance, c'est-à-dire, (par l'hypothese) comme la somme de deux quantités dont l'une est comme la vitesse & l'autre comme le quarré de la vitesse; mais le décrement de $\frac{1}{GD}$ est comme la somme des quantités $\frac{1}{GD}$ & $\frac{CG}{GD^2}$ desquelles la premiere est $\frac{1}{GD}$ elle-même, & la dernière $\frac{CG}{GD^2}$ est proportionnelle à $\frac{1}{GD^2}$: donc $\frac{1}{GD}$, à cause du décrement analogue, est comme la vitesse. Et si on augmente la quantité GD réciproquement proportionnelle à $\frac{1}{GD}$ de la quantité donnée CG ; la somme CD croîtra en progression géométrique, lorsque le temps $ABED$ croîtra uniformément.

Cor. 1. Donc, si les points A & G étant donnés, on exprime le temps par l'aire hyperbolique $ABED$, la vitesse peut être exprimée par $\frac{1}{GD}$ réciproque de GD .

Cor. 2. En prenant GA à GD comme la réciproque de la vitesse au commencement à la réciproque de la vitesse à la fin d'un temps quelconque $ABED$, on trouvera le point G ; & ce point étant trouvé, on peut trouver la vitesse pour un autre temps donné quelconque.

PROPOSITION

PROPOSITION XII. THÉORÈME IX.

LIVRE
SECOND.

Les mêmes choses étant posées, je dis que, si on prend les espaces décrits en progression arithmétique, les vitesses augmentées d'une quantité quelconque donnée seront en progression géométrique.

Fig. 19,

Sur l'asymptote CD soit donné le point R , & soit élevée la perpendiculaire RS qui rencontre l'hyperbole en S , & soit prise l'aire hyperbolique $RSED$ pour exprimer l'espace décrit; la vitesse sera comme la longueur GD , laquelle avec la donnée CG compose la longueur CD qui décroît en progression géométrique pendant que l'espace $RSED$ augmente en progression arithmétique.

Car à cause de l'incrément donné $EDde$ de l'espace, la petite ligne Dd qui est le décrément de GD sera réciproquement comme ED , ou directement comme CD , c'est-à-dire, comme la somme de GD même & de la longueur donnée CG . Mais le décrément de la vitesse dans un temps qui lui est réciproquement proportionnel, & pendant lequel la particule donnée $DdeE$ de l'espace est décrite, est comme la résistance, & le temps conjointement; c'est-à-dire, directement comme la somme de deux quantités dont l'une est comme la vitesse & l'autre comme le carré de la vitesse, & inversement comme la vitesse; & par conséquent, directement comme la somme de deux quantités, dont l'une est donnée, & l'autre est proportionnelle à la vitesse. Donc le décrément tant de la vitesse que de la ligne GD est comme la quantité donnée & la quantité décroissante conjointement, & à cause que les décréments sont proportionnels, les quantités décroissantes, c'est-à-dire, la vitesse & la ligne GD seront toujours proportionnelles. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Si la vitesse est exprimée par la longueur GD , l'espace décrit sera comme l'aire hyperbolique $DESR$.

Cor. 2. Et si on prend le point R à volonté, on trouvera le point G en prenant GR à GD comme la vitesse au commen-

cement est à la vitesse après l'espace $RSE D$ décrit. Or le point G étant trouvé, on a l'espace lorsque la vitesse est donnée; & au contraire.

Fig. 19.

Cor. 3. Donc la vitesse étant donnée (Prop. 11.) lorsque le temps est donné, & par cette présente Proposition l'espace étant donné lorsque la vitesse est donnée; on aura l'espace quand le temps sera donné: & au contraire.

PROPOSITION XIII. THÉORÈME X.

Supposé que le corps étant attiré en enbas par une gravité uniforme monte ou descende dans une ligne droite, & qu'il éprouve une résistance qui soit en partie en raison de la vitesse, & en partie dans cette même raison doublée: je dis que, si on mene des droites parallèles aux diametres du cercle & de l'hyperbole par les extrémités de leurs diametres conjugués, & que les vitesses soient comme les segmens quelconques faits par ces parallèles menées d'un point donné, les temps seront comme les secteurs des aires retranchées des segmens: & réciproquement.

Fig. 20.

Cas 1. Supposons premièrement que le corps monte, du centre D & d'un demi diametre quelconque DB soit décrit un quart de cercle $BETF$, & par l'extrémité B du demi diametre DB soit tirée la ligne infinie BAP parallèle au demi diametre DF . Sur cette parallèle soit donné le point A , & soit prise AP proportionnelle à la vitesse. Comme une partie de la résistance est comme la vitesse, & l'autre partie comme le carré de la vitesse: soit la résistance totale comme $AP^2 + 2BAP$, & soient tirées DA, DP qui coupent le cercle en E & T , soit enfin exprimée la gravité par AD^2 enforte que la gravité soit à la résistance en P comme DA^2 à $AP^2 + 2BAP$: & le temps de l'ascension totale sera comme le secteur EDT du cercle.

Car soit menée DPQ qui coupe, tant le moment PQ de la

vitesse AP , que le moment DTV du secteur DET répondant au moment donné du temps ; & ce décrement PQ de la vitesse sera comme la somme des forces de la gravité DA^2 & de la résistance $AP^2 + 2BAP$, c'est-à-dire, comme DP^2 . Donc l'aire DPQ qui est proportionnelle à PQ est comme DP^2 , & l'aire DTV qui est à l'aire DPQ comme DT^2 à DP^2 : donc l'aire EDT sera comme la quantité donnée DT^2 , & cette aire décroît uniformément comme le temps restant, en soustrayant les particules données DTV , & par conséquent cette aire est proportionnelle au temps de toute l'ascension. *C. Q. F. D.*

Cas 2. Si la longueur AP exprime comme ci-dessus la vitesse lorsque le corps remonte, qu'on suppose la résistance comme $AP^2 + 2BAP$, & que la force de la gravité soit moindre que celle qui peut être exprimée par DA^2 ; on prendra BD d'une longueur telle que $AB^2 - BD^2$ soit proportionnelle à la gravité, & que DF soit perpendiculaire & égale à BD ; par le sommet F , on décrira l'hyperbole $FTVE$ dont les demi-diamètres conjugués soient DB & DF , & qui coupe DA en E & DP , DQ en T & V ; & le temps de l'ascension entière sera comme le secteur TDE de l'hyperbole.

Car le décrement PQ de la vitesse pendant une particule de temps donnée est comme la somme de la résistance $AP^2 + 2BAP$ & de la gravité $AB^2 - BD^2$, c'est-à-dire, comme $BP^2 - BD^2$. Mais l'aire DTV est à l'aire DPQ comme DT^2 à DP^2 , c'est-à-dire, (en abaissant GT perpendiculaire sur DF) comme GT^2 ou $GD^2 - DF^2 : BD^2$ & :: $GD^2 : BP^2$, & en divisant :: $DF^2 : BP^2 - BD^2$. Donc comme l'aire DPQ est proportionnelle à PQ , c'est-à-dire, à $BP^2 - BD^2$, on aura l'aire DTV comme la quantité donnée DFQ . L'aire EDT décroît donc uniformément à chaque particule égale de temps, par la soustraction d'autant de particules données DTV , & par conséquent elle est proportionnelle au temps. *C. Q. F. D.*

LIVRE
SECOND.

Fig. 20.

Fig. 21.

D U
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. 22.

Cas 3. Que AP représente la vitesse dans la descente du corps, $AP^2 + 2BAP$ la résistance, & $BD^2 - AB^2$ la force de la gravité, l'angle DBA étant droit. Si du centre D & du sommet B on décrit l'hyperbole équilatère $BETV$ coupant les lignes DA , DP , & DQ prolongées en E , T & V , le secteur EDT de cette hyperbole sera comme le temps total de la descente. Car l'incrément PQ de la vitesse, & l'aire PDQ qui lui est proportionnelle est comme l'excès de la gravité sur la résistance, c'est-à-dire, comme $BD^2 - AB^2 - 2APB - AP^2$ ou $BD^2 - BP^2$; & l'aire DTV est à l'aire DPQ comme DT^2 à DP^2 , & par conséquent comme GT^2 ou $GD^2 - BD^2$ à BP^2 , ou bien comme GD^2 à BD^2 , ou bien encore comme BD^2 à $BD^2 - BP^2$. C'est pourquoi comme l'aire DPQ est proportionnelle à $BD^2 - BP^2$, l'aire DTV sera comme la quantité donnée BD^2 . L'aire EDT croît donc uniformément pendant chaque particule égale de temps par l'addition d'autant de particules données DTV , & par conséquent elle est proportionnelle au temps de la descente. *C. Q. F. D.*

Cor. Si du centre D & du demi-diamètre DA , on décrit par le sommet A un arc At semblable à l'arc ET & sous-tendant de même l'angle ADT : la vitesse AP sera à la vitesse que le corps peut acquérir en descendant ou perdre en remontant dans un espace non résistant, & pendant le temps EDT , comme l'aire du triangle ADP à l'aire du secteur DAt ; & par conséquent cette vitesse sera donnée dans un temps donné. Car la vitesse, dans un milieu non résistant, est proportionnelle au temps, & par conséquent à ce secteur, & dans un milieu résistant elle est comme le triangle; & dans l'un & l'autre milieu lorsqu'elle est très-petite elle approche de la raison d'égalité: ainsi que le secteur & le triangle.

SCHOLIE.

Ce cas peut ainsi se démontrer dans l'ascension du corps.

lorsque la force de la gravité est moindre que celle qu'on peut exprimer par AD^2 ou $AB^2 + BD^2$ & plus grande que celle qui peut l'être par $AB^2 - BD^2$, & qui doit l'être par AB^2 . Mais passons à d'autres Propositions.

PROPOSITION XIV. THÉORÈME XI.

Les mêmes choses étant posées, je dis, que l'espace décrit dans l'ascension ou la descente, est comme la différence de l'aire qui représente le temps, & d'une autre aire quelconque qui augmente ou diminue en progression arithmétique; si on prend les forces composées de la résistance & de la gravité en progression géométrique,

Soit prise AC proportionnelle à la gravité, & AK proportionnelle à la résistance, en observant de les placer du même côté du point A si le corps descend, & du côté opposé s'il remonte. Soit de plus élevé Ab qui soit à DB comme DB^2 à $4BAC$: ayant décrit l'hyperbole bN dont les asymptotes soient les perpendiculaires CK , CH , & ayant élevé KN perpendiculaire sur CK , l'aire $AbNK$ augmentera ou diminuera en progression arithmétique lorsqu'on prendra les forces CK en progression géométrique. Cela posé, je dis donc que la distance du corps du lieu où il parviendrait à sa plus grande hauteur est comme l'excès de l'aire $AbNK$ sur l'aire DET .

Car AK étant comme la résistance, c'est-à-dire, comme $AP^2 + 2BAP$; soit prise une quantité donnée quelconque Z & soit supposée $AK = \frac{AP^2 + 2BAP}{Z}$ & (par le Lemme 11. de ce Livre) le moment KL de AK sera égal à $\frac{2APQ + 2BA \times PQ}{Z}$ ou $\frac{2BPQ}{Z}$ & le moment $KLON$ de l'aire $AbNK$ sera égal à $\frac{2BPQ \times LO}{Z}$ ou $\frac{BPQ \times BD^2}{2Z \times CK \times AB}$.

Cas 1. Si on suppose que le corps monte, & que la gravité.

Fig. 23.) la ligne AC qui est proportionnelle à la gravité fera
 Fig. 25, 24, & 25. $\frac{AB^2 + BD^2}{Z}$ & DP^2 ou $AP^2 + 2BAP + AB^2 + BD^2$, fera
 $AK \times Z + AC \times Z$ ou $CK \times Z$; donc l'aire DTV sera à l'aire
 DPQ comme DT^2 ou DB^2 à $CK \times Z$.

Cas. 2. Si le corps monte, & que la gravité soit comme
 $AB^2 - BD^2$ la ligne AC (dans la figure 24.) fera $\frac{AB^2 - BD^2}{Z}$
 & DT^2 sera à DP^2 comme DF^2 ou DB^2 à $BP^2 - BD^2$ ou
 $AP^2 + 2BAP + AB^2 - BD^2$, c'est-à-dire, à $AK \times Z + AC$
 $\times Z$ ou $CK \times Z$. Donc l'aire DTV sera à l'aire DPQ comme
 DB^2 à $CK \times Z$.

Cas 3. Et par le même raisonnement, si le corps descend, &
 que par conséquent la gravité soit comme $BD^2 - AB^2$ & que
 la ligne AC (dans la fig. 25.) soit égale à $\frac{BD^2 - AB^2}{Z}$ l'aire
 DTV sera à l'aire DPQ comme BD^2 à $CK \times Z$: comme
 ci-dessus.

Or comme ces aires sont toujours dans cette raison; si au lieu
 de l'aire DTV , par laquelle le moment du temps, toujours égal
 à lui-même, est représenté, on écrit un rectangle quelconque
 déterminé comme $BD \times m$, on aura l'aire DPQ , c'est-à-dire,
 $\frac{1}{2}BD \times PQ$ à $BD \times m$, comme $CK \times Z$ à BD^2 . D'où on
 tirera $PQ \times BD^2 = 2BD \times m \times CK \times Z$, & le moment $KLON$
 de l'aire $AbNK$ trouvé ci-dessus, sera $\frac{BP \times BD \times m}{AB}$. otant
 le moment DTV ou $BD \times m$ de l'aire DET , il restera
 $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$. La différence des momens, c'est-à-dire, le mo-
 ment de la différence des aires, est donc égale à $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$,
 & par conséquent, à cause que $\frac{BD \times m}{AB}$ est donné, comme la

vitesse AP , c'est-à-dire, comme le moment de l'espace que le corps décrit dans son ascension, ou dans sa descension. Donc la différence des aires, & cet espace qui croissent ou décroissent par des momens proportionnels & qui naissent ou s'évanouissent en même-temps sont toujours proportionnels. *C. Q. F. D.*

Fig. 23, 24, & 25.

Cor. Si l'on nomme M la longueur qui vient en divisant l'aire DET par la ligne BD ; & qu'une autre longueur V soit prise à la longueur M dans la raison que la ligne DA a à la ligne DE : l'espace que le corps parcourt dans toute son ascension, ou dans toute sa descension dans un milieu résistant, sera à l'espace qu'il peut décrire dans un milieu non résistant dans le même temps en tombant de son point de repos, comme la différence des aires dont on a parlé à $\frac{BD \times V^2}{AB}$: c'est-à-dire, que l'espace sera donné lorsque le temps est donné. Car l'espace parcouru dans un milieu qui ne résiste point est en raison doublée du temps, ou comme V^2 , & à cause des données BD & AB comme $\frac{BD^2 \times V^2}{AB}$. Cette aire est égale à l'aire $\frac{DA^2 \times BD \times M^2}{DE^2 \times AB}$, & le moment de M est m , & par conséquent le moment de cette aire est $\frac{DA^2 \times BD \times 2 M \times m}{DE^2 \times AB}$. Mais ce moment est au moment de la différence des aires DET , & $AbNK$ dont on a parlé, c'est-à-dire, à $\frac{AP \times BD \times m}{AB}$ comme $\frac{DA^2 \times BD \times M}{DE^2}$, est à $\frac{1}{2} BD \times AP$, ou comme $\frac{DA^2}{DE^2} \times DET$ est à DAP , c'est-à-dire, lorsque les aires DET & DAP sont infiniment petites, en raison d'égalité. Donc l'aire $\frac{BD \times V^2}{AB}$ & la différence des aires DET & $AbNK$, quand toutes ces aires sont très-petites, ont des momens égaux, & sont par conséquent égales. Delà, lorsque les vitesses, & par conséquent aussi les es-

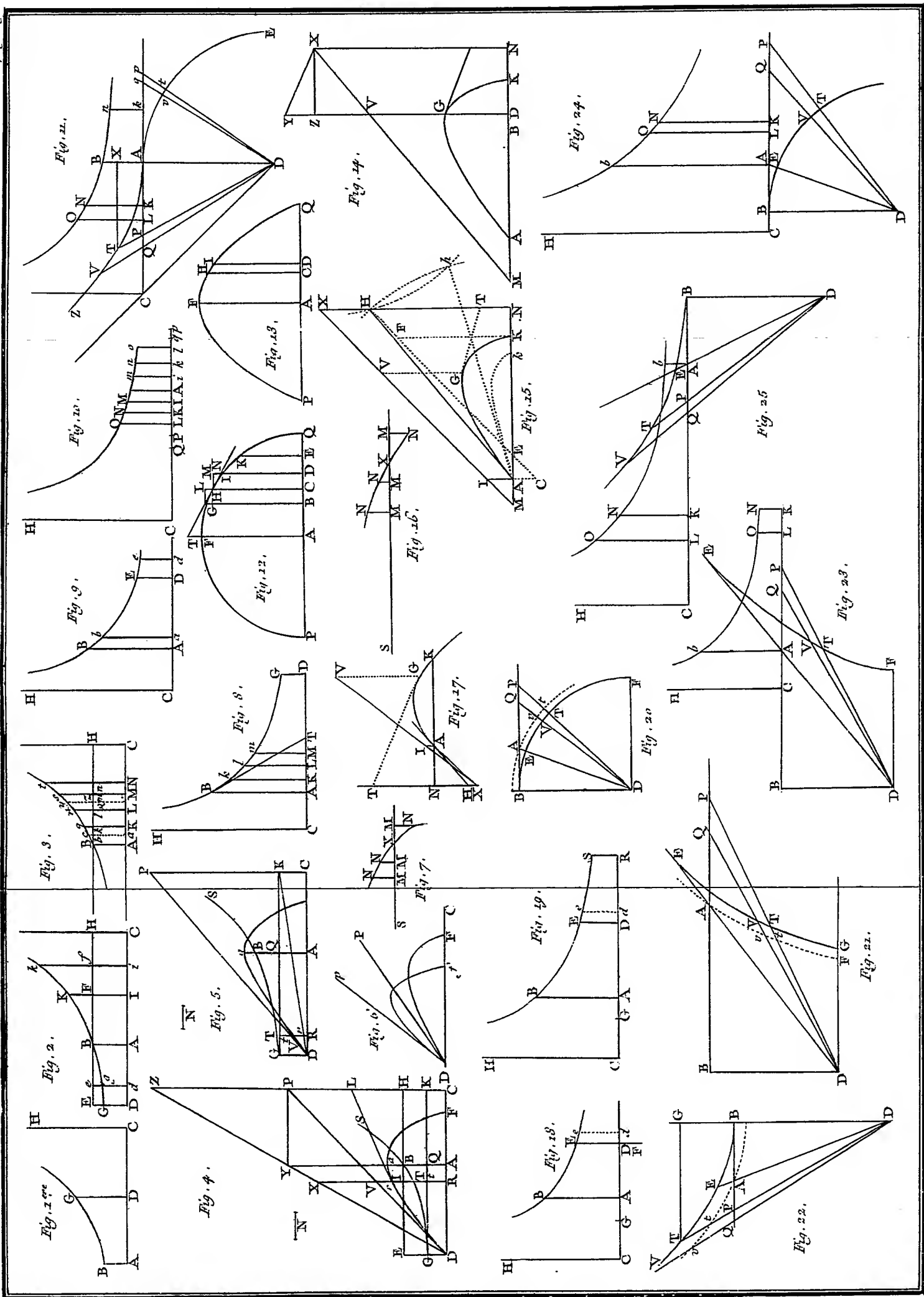
Fig. 23. 24. & 25.

paces parcourus en même-temps dans l'un & l'autre milieu au commencement de la descension ou à la fin de l'ascension approchent de l'égalité, ils sont alors l'un à l'autre comme l'aire $\frac{BD \times V^2}{AB}$ & la différence des aires DET & $AbNK$; de plus, comme l'espace dans un milieu non résistant est toujours comme $\frac{BD \times V^2}{AB}$ & que dans un milieu qui résiste il est toujours comme la différence des aires DET & $AbNK$: il est nécessaire que les espaces parcourus dans l'un & l'autre milieu, pendant des temps quelconques égaux, soient entr'eux comme cette aire $\frac{BD \times V^2}{AB}$ & la différence des aires DET & $AbNK$. C. Q. F. D.

S C H O L I E.

La résistance que les corps sphériques éprouvent dans les fluides vient en partie de la ténacité, en partie du frottement, & en partie de la densité du milieu. C'est cette partie de la résistance qui vient de la densité du fluide que nous disons être en raison doublée de la vitesse; l'autre partie qui vient de la ténacité du fluide est uniforme ou comme le moment du temps: il seroit donc à propos de parler du mouvement des corps qui éprouvent une résistance causée en partie par une force uniforme ou en raison des momens du temps, & en partie par une force en raison doublée de la vitesse. Mais il suffit d'avoir préparé la voye à cette spéculation par les Prop. 8. & 9. & leurs Corollaires. Car dans ces Propositions on peut substituer à la place de la résistance uniforme qu'éprouve un corps qui remonte, laquelle vient de la gravité, la résistance uniforme qui vient de la ténacité du milieu lorsque le corps se meut par la seule force qui lui a été imprimée; & on peut ajouter cette résistance, uniforme causée par la gravité, au corps qui monte en ligne droite, & la soustraire lorsque le corps descend en ligne droite. Il seroit donc

temps



temps de parler à présent du mouvement des corps qui éprouvent une résistance composée de forces qui sont en partie uniformes, en partie en raison de la vitesse, & en partie en raison doublée de cette vitesse. J'en ai posé les principes dans les Prop 12. & 14. dans lesquelles on peut aussi substituer la résistance uniforme qui vient de la ténacité du milieu à la place de la force de la gravité, ou prendre les deux forces ensemble comme ci-dessus. Ainsi je passe à d'autres Propositions.

QUATRIÈME SECTION.

Du mouvement circulaire des corps dans les milieux résistans:

LEMME III.

Soit PQR une spirale qui coupe tous les rayons SP , SQ , SR , &c. sous des angles égaux. Soit tirée la droite PT qui touche la spirale en un point quelconque P , & qui coupe le rayon SQ en T ; ayant tiré à la spirale les perpendiculaires PO , QO qui concourent en O , soit tirée SO . Je dis que, si les points P & Q s'approchent l'un de l'autre & se confondent, l'angle PSO deviendra droit, & la dernière raison du rectangle $TQ \times 2PS$ à PQ^2 sera une raison d'égalité.

Fig. 291

Car des angles droits OPQ , OQR soient ôtés les angles égaux SPQ , SQR , il restera les angles égaux OPS , OQS . Donc le cercle qui passe par les points O , S , P passera aussi par le point Q . Que les points P & Q coïncident, ce cercle touchera la spirale dans le point de leur coïncidence, & par conséquent il coupera perpendiculairement la droite OP . Que cette ligne OP devienne le diamètre de ce cercle, & l'angle OSP qui est dans le demi cercle sera droit. C. Q. F. D.

Sur OP soient abaissées les perpendiculaires QD , SE , & les dernières raisons de ces lignes seront telles; $TQ:PD::TS$

ou $PS:PE$ ou $2PO:2PS$; de plus, $PD:PQ::PQ:2PO$,
d'où on tire $PQ^2 = TQ \times 2PS$. C. Q. F. D.

PROPOSITION XV. THÉORÈME XII.

Fig. 26.

Si la densité du milieu à chacun des lieux est réciproquement comme la distance au centre immobile, & que la force centripète soit en raison doublée de la densité; je dis, que le corps peut se mouvoir dans une spirale qui coupera sous un angle donné tous les rayons tirés de ce centre.

Fig. 27.

Les mêmes choses étant supposées que dans le Lemme précédent, soit prolongée SQ en V , enforte que $SV=SP$. Que le corps dans un temps quelconque parcoure dans un milieu résistant le très-petit arc PQ , & dans un temps double, le très-petit arc PR ; les décrémens de ces arcs qui feroient décrits dans un milieu non résistant pendant les mêmes temps feront entr'eux comme les quarrés des temps dans lesquels ils sont produits: donc le décrément de l'arc PQ est la quatrième partie du décrément de l'arc PR . Donc si on prend l'aire QSr égale à l'aire PSQ , le décrément de l'arc PQ sera égal à la moitié de la petite ligne Rr ; donc la force de la résistance & la force centripète sont l'une à l'autre comme les petites lignes $\frac{1}{2}Rr$ & TQ qu'elles produisent en même temps. Mais comme la force centripète par laquelle le corps est pressé en P est réciproquement comme SP^2 , & que (par le Lemme 10. du Liv. 1.) la petite ligne TQ que cette force a produit est en raison composée de la raison de cette force & de la raison doublée du temps dans lequel l'arc PQ a été décrit, (car dans ce cas je néglige la résistance comme étant infiniment plus petite que la force centripète) $TQ \times SP^2$, c'est-à-dire, (par le dernier Lemme) $\frac{1}{2}PQ^2 \times SP$ sera en raison doublée du temps; le temps est donc comme $PQ \times \sqrt{SP}$; & la vitesse du corps par laquelle l'arc PQ est parcouru dans ce temps est comme $\frac{PQ}{PQ \times \sqrt{SP}}$ ou $\frac{1}{\sqrt{SP}}$, c'est-à-dire, réciproquement en rai-

son doublée de SP . Par le même raisonnement, la vitesse avec laquelle l'arc QR est décrit est réciproquement en raison sous-doublée de SQ . Mais ces arcs PQ & QR sont l'un à l'autre comme les vitesses décrivantes, c'est-à-dire, en raison sous-doublée de SQ à SP , ou comme SQ à $\sqrt{SP \times SQ}$; & à cause des angles égaux SPQ , SQR & des aires égales PSQ , QSR , l'arc PQ est à l'arc QR comme SQ à SP . Prenant donc les différences des conséquents proportionnels, on aura l'arc PQ à l'arc Rr comme SQ à $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ ou $\frac{1}{2}VQ$. Car les points P & Q coïncidans, la dernière raison de $SP - \sqrt{SP \times SQ}$ à $\frac{1}{2}VQ$ est la raison d'égalité. Et parce que le décrement de l'arc PQ , causé par la résistance, ou son double Rr est comme la résistance & le carré du temps conjointement; la résistance fera comme

$\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$. Mais on avoit $PQ : Rr :: SQ : \frac{1}{2}VQ$, & de là

$\frac{Rr}{PQ^2 \times SP}$ devient comme $\frac{\frac{1}{2}VQ}{PQ \times SP \times SQ}$ ou comme $\frac{\frac{1}{2}OS}{OP \times SP^2}$.

Car les points P & Q coïncidans, SP & SQ coïncideront aussi, & l'angle PVQ fera droit; & à cause des triangles semblables

PVQ , PSO , $PQ : \frac{1}{2}VQ :: OP : \frac{1}{2}OS$. Donc $\frac{OS}{OP \times SP^2}$ est

comme la résistance, c'est-à-dire, en raison de la densité du milieu au point P , & en raison doublée de la vitesse conjointement. Donc en ôtant la raison doublée de la vitesse, c'est-à-dire, la raison $\frac{1}{SP}$, il restera la densité du milieu en P proportionnelle à

$\frac{OS}{OP \times SP}$. Soit donnée la spirale; & à cause de la raison de OS

à OP qui est donnée, la densité du milieu en P sera comme $\frac{1}{SP}$. Donc dans un milieu dont la densité est réciproquement

comme la distance SP du centre, le corps peut se mouvoir dans cette spirale. C. Q. F. D.

Cor. 1. La vitesse dans un lieu quelconque P est toujours celle

avec laquelle le corps peut tourner par la même force centripète dans un milieu non résistant dans un cercle à la même distance SP du centre.

Cor. 2. Si la distance SP est donnée, la densité du milieu est comme $\frac{OS}{OP}$, & si cette distance n'est pas donnée, la densité est comme $\frac{OS}{OP \times SP}$. Et par conséquent, on peut appliquer la spirale à une densité quelconque du milieu.

Cor. 3. La force de la résistance dans un lieu quelconque P est à la force centripète dans le même lieu, comme $\frac{1}{2}OS$ à OP . Car ces forces sont entr'elles comme $\frac{1}{2}Rr$ & TQ , ou comme $\frac{\frac{1}{2}VQ \times PQ}{SQ}$ & $\frac{\frac{1}{2}PQ^2}{SP}$, c'est-à-dire, comme $\frac{1}{2}VQ$ & PQ , ou $\frac{1}{2}OS$ & OP . Or la spirale étant donnée, la proportion de la résistance à la force centripète est aussi donnée, & réciproquement, cette proportion étant donnée, la spirale l'est aussi.

Cor. 4. Le corps ne peut donc tourner dans cette spirale, que lorsque la force de la résistance est moindre que la moitié de la force centripète. Car supposé que la résistance soit égale à la moitié de la force centripète, alors la spirale se confondra avec la ligne droite PS , & dans ce cas, le corps descendra vers le centre dans cette droite avec une vitesse, qui sera à la vitesse avec laquelle nous avons prouvé ci-dessus, dans le cas de la parabole, (Théor. 10. du Liv. 1.) que le corps descendrait dans un milieu non résistant, en raison sous-doublée de 1 à 2. Et les temps de la descente seront ici réciproquement comme les vitesses & par conséquent ils seront donnés.

Cor. 5. Et parce que à égales distances du centre, la vitesse est la même dans la spirale PQR & dans la droite SP , & que la longueur de la spirale, est à la longueur de la droite SP , dans la raison de OP à OS ; le temps de la descente dans la spirale sera au temps de la descente dans la droite SP dans cette

même raison donnée, & par conséquent il sera donné.

Cor. 6. Si du centre S , & de deux intervalles quelconques donnés on décrit deux cercles, & si ces deux cercles restans les mêmes, l'angle que la spirale fait avec le rayon SP change d'une façon quelconque : le nombre des révolutions que le corps P peut achever entre les circonférences de ces cercles en allant dans la spirale d'une circonférence à l'autre est comme $\frac{PS}{OS}$ ou comme la tangente de l'angle que la spirale fait avec le rayon PS ; & le temps de ces révolutions est comme $\frac{OP}{OS}$, c'est-à-dire, comme la sécante du même angle, ou bien réciproquement, comme la densité du milieu.

Cor. 7. Si le corps dans un milieu dont la densité est réciproquement comme la distance des lieux au centre, faisoit une révolution dans une courbe quelconque AEB autour de ce centre, & que le premier rayon AS la coupât sous le même angle en B , qu'il l'avoit coupée premièrement en A , & que la vitesse du corps à ce lieu B fut à sa première vitesse en A réciproquement en raison sous doublée des distances au centre, (c'est-à-dire, comme AS à la moyenne proportionnelle entre AS & BS) ce corps continueroit à faire une infinité de révolutions semblables BFC , CGD &c. & partageroit par leurs intersections le rayon AS dans les parties AS , BS , CS , DS , &c. continuellement proportionnelles. Et les temps des révolutions seront comme les périmètres des spires, AEB , BFC , CGD , &c. directement, & les vitesses aux commencemens A , B , C de ces révolutions inversement; c'est-à-dire, comme $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$. Donc le temps total dans lequel le corps parviendra au centre sera au temps de la première révolution, comme la somme de toutes les continuellement proportionnelles $AS^{\frac{3}{2}}$, $BS^{\frac{3}{2}}$, $CS^{\frac{3}{2}}$ (jusqu'à l'infini) au premier terme $AS^{\frac{3}{2}}$; c'est-à-

LIVRE
SECOND.

Fig. 27.

Fig. 27.

dire, comme le premier terme $AS^{\frac{3}{2}}$ à la différence des deux premiers termes $AS^{\frac{3}{2}} - BS^{\frac{3}{2}}$, ou comme $\frac{2}{3} AS$ à AB à peu près. Ce qui donnera aisément ce temps total.

Cor. 8. De tout ceci on peut tirer à peu près le mouvement des corps dans des milieux dont la densité ou est uniforme, ou observe une autre loi quelconque assignée.

Du centre S , & des intervalles continuellement proportionnels SA , SB , SC , &c. décrivez un nombre quelconque de cercles, & supposez que le temps des révolutions entre les périmètres de deux de ces cercles quelconques, dans le milieu dont nous parlons, soit au temps des révolutions, entre ces mêmes cercles, dans le milieu proposé, à peu près comme la densité moyenne du milieu proposé entre ces cercles, à la densité moyenne du milieu dont nous parlons entre ces mêmes cercles : & que la sécante de l'angle, sous lequel la spirale précédente coupe le rayon AS dans le milieu dont nous parlons, soit dans la même raison à la sécante de l'angle sous lequel la spirale nouvelle coupe le même rayon dans le milieu proposé : & qu'enfin les nombres de toutes les révolutions entre les deux mêmes cercles soient à peu près comme les tangentes de ces mêmes angles. Si cela arrive ainsi entre deux cercles quelconques, le mouvement se continuera entre tous les autres cercles. Et de-là on peut trouver facilement de quelle façon & dans quels temps les corps doivent tourner dans un milieu quelconque qui résiste selon une loi quelconque assignée.

Cor. 9. Et quoique le mouvement soit excentrique dans les spirales qui approchent de l'ovale, cependant, en imaginant que chaque révolution de ces spirales soient séparées par des intervalles égaux, & qu'ils arrivent au centre par les mêmes degrés que la spirale qu'on a décrit ci-dessus, on comprendra de quelle manière les mouvemens des corps s'exécutent dans ces fortes de spirales.

PROPOSITION XVI. THÉORÈME XIII.

LIVRE
SECOND.

Fig. 27.

Si la densité du milieu à chacun des lieux ; est réciproquement comme la distance de ces lieux au centre immobile , & que la force centripète soit réciproquement comme une puissance quelconque de cette même distance : je dis que le corps peut tourner dans une spirale qui coupe sous un angle donné tous les rayons tirés de ce centre.

Cette Proposition se démontre de la même manière que la Proposition précédente. Car si la force centripète en P est réciproquement comme une puissance quelconque SP^{n+1} de la distance SP , on trouvera, comme ci-dessus, que le temps pendant lequel le corps parcourt l'arc quelconque PQ sera comme $PQ \times PS^{\frac{1}{2}n}$; & la résistance en P fera comme $\frac{Rr}{PQ^2 \times SP^n}$

ou comme $\frac{1 - \frac{1}{2}n \times VQ}{PQ \times SP^n \times SQ}$ & par conséquent, comme $\frac{1 - \frac{1}{2}n \times OS}{OP \times SP^{n+1}}$, c'est-à-dire, à cause de la quantité donnée $\frac{1 - \frac{1}{2}n \times OS}{OP}$, réciproquement comme SP^{n+1} . Donc la vitesse étant réciproquement comme $SP^{\frac{1}{2}n}$, la densité en P fera réciproquement comme SP .

Cor. 1. La résistance est à la force centripète comme $\frac{1 - \frac{1}{2}n \times OS}{OP}$ à OP .

Cor. 2. Si la force centripète est réciproquement comme SP ; alors $1 - \frac{1}{2}n = 0$; donc alors la résistance & la densité du milieu seront nulles, comme dans la Prop. 9. du Liv. 1.

Cor. 3. Si la force centripète est réciproquement comme quelque puissance du rayon SP dont l'exposant soit plus grand que le nombre 3. la résistance deviendra de positive négative.

S C H O L I E.

Au reste, cette Proposition & les précédentes, qui ont rap-

port aux milieux inégalement denses, doivent s'appliquer aussi aux mouvemens des corps qui sont assez petits pour que l'excès de la densité du milieu qui touche un de leurs côtés sur celle du milieu qui touche leur autre côté puisse être négligée. Je suppose ici la résistance proportionnelle à la densité, le reste étant égal. Ainsi dans les milieux dont la force résistante n'est pas comme la densité, la densité doit augmenter ou diminuer jusqu'à ce que l'excès de la résistance soit contre-balancé, ou que son défaut soit suppléé.

PROPOSITION XVII. PROBLÈME IV.

Trouver, & la force centripète, & la résistance du milieu nécessaires pour que le corps puisse se mouvoir dans une spirale donnée par une loi de vitesse donnée.

Fig. 29.

Soit cette spirale PQR . La vitesse avec laquelle le corps décrit le très-petit arc PQ étant donnée, le temps l'est aussi, & par la hauteur TQ , qui est comme la force centripète & le carré du temps, on a la force. Ensuite par la différence RSr des aires PSQ & QSR décrites en des particules égales de temps, on aura la retardation du corps, & par la retardation on trouvera la résistance, & la densité du milieu.

PROPOSITION XVIII. PROBLÈME V.

La loi de la force centripète étant donnée, trouver à chacun des lieux la résistance du milieu nécessaire pour que le corps décrive une spirale donnée.

Par le moyen de la force centripète donnée il faut trouver la vitesse à chacun des lieux, ensuite il faut par la retardation de la vitesse chercher la densité du milieu ; comme dans la Proposition précédente.

J'ai fait voir, dans la dixième Prop. & dans le Lemme 2. de ce Livre, la manière de traiter ces Problèmes, & je ne veux pas arrêter plus long-temps le Lecteur à ces sortes de discussions
assez

assez compliquées. Il est temps de dire quelque chose des forces des corps dans leurs mouvemens progressifs, de la densité, & de la résistance des milieux dans lesquels les mouvemens dont j'ai parlé jusqu'à présent & ceux de même nature s'exécutent.

CINQUIEME SECTION.

De la densité & de la compression des Fluides & de l'Hydrostatique.

DEFINITION DU FLUIDE.

Les corps fluides sont ceux dont les parties cèdent à toute espee de force qui agit sur eux, & qui se meuvent très-facilement entre eux.

PROPOSITION XIX. THÉORÈME XIV.

Toutes les parties d'un fluide immobile & homogène enfermé dans un vase quelconque immobile dans lequel il est comprimé de toutes parts, (en faisant abstraction de la gravité, de la condensation, & de toute espèce de force centripète) sont également pressées de tous les côtés, & chacune reste dans son lieu sans que cette pression produise aucun mouvement.

Cas 1. Dans un vase sphérique ABC , soit enfermé un fluide de manière qu'il y soit comprimé de toutes parts également, je dis qu'aucune de ses parties ne se mouvra par cette pression. Car si quelque partie D se mouvoit, il seroit nécessaire que toutes les autres parties qui sont à la même distance du centre se meussent ensemble d'un mouvement semblable; & cela parce que la pression qu'elles éprouvent toutes est égale & semblable,

Fig. 30.

& qu'on suppose qu'elles n'ont point d'autre mouvement que celui que cette pression peut produire. Or elles ne peuvent toutes approcher plus près du centre, à moins que le fluide ne se condense vers le centre; ce qui est contre l'hypothèse. Elles ne peuvent non plus s'en éloigner à moins que le fluide ne se condense vers la circonférence, ce qui est aussi contre l'hypothèse. Enfin elles ne peuvent, en conservant leur distance au centre, se mouvoir vers un côté quelconque parce qu'il y aurait la même raison pour qu'elles se meussent vers le côté opposé. Or une même partie ne peut se mouvoir en même temps vers des côtés opposés, donc aucune partie de ce fluide ne sortira de sa place. *C. Q. F. D.*

Cas 2. Je dis à présent, que toutes les parties sphériques de ce fluide sont également pressées de tous côtés. Car supposez que *EF* soit une partie sphérique de ce fluide, si elle n'est pas également pressée de tous côtés, supposez que la pression la plus foible augmente jusqu'à ce que cette partie sphérique soit également pressée de toutes parts, & alors, par le premier cas, toutes les parties demeureront dans leurs lieux. Mais avant que cette pression fut augmentée, elles devoient demeurer aussi dans leurs lieux, par le même cas premier, & la pression étant augmentée, elles doivent sortir de leurs lieux par la définition du fluide, or ces deux choses sont contradictoires. Donc il étoit faux de dire que la sphere *EF* ne fut pas également pressée de toutes parts. *C. Q. F. D.*

Cas 3. Je dis de plus que la pression de plusieurs parties sphériques est égale, car les parties sphériques contigues se pressent mutuellement & également dans le point de contact par la troisième loi du mouvement, mais par le cas second, elles sont pressées de toutes parts par la même force. Donc deux parties quelconques sphériques non contigues sont pressées par la même force, parce qu'une partie sphérique intermédiaire peut toucher l'une & l'autre. *C. Q. F. D.*

Cas 4. Je dis encore que toutes les parties du fluide sont pressées partout également. Car deux parties quelconques peuvent être touchées par les parties sphériques dans des points quelconques, & les parties sphériques pressent également dans ces points par le cas troisième, & elles sont également pressées à leur tour par ces deux autres parties par la troisième loi du mouvement. *C. Q. F. D.*

Cas 5. Or comme une partie quelconque *GHI* du fluide est renfermée dans le reste de ce fluide comme dans un vase, & qu'elle y est également pressée de tous côtés, & que de plus toutes les parties qui la composent se pressent mutuellement & également, & sont en repos entr'elles; il est clair que toutes les parties *GHI* d'un fluide quelconque qui est comprimé également de tous côtés, se pressent également les unes les autres, & sont en repos entr'elles. *C. Q. F. D.*

Fig. 3^{re}

Cas 6. Si ce fluide n'est pas renfermé dans un vase inflexible, & que par conséquent il ne soit pas pressé également de toutes parts; il cédera à la pression la plus forte par la définition de la fluidité.

Cas 7. Donc dans un vase inflexible le fluide ne soutiendra pas une pression plus forte d'un côté que de l'autre, mais il cédera à la plus forte, & cela dans un instant indivisible, parce que le côté inflexible du vase ne poursuit pas la liqueur qui cède: le fluide en cédant pressera donc le côté opposé, & ainsi la pression deviendra égale de tous côtés, & parce que le fluide dans le premier moment où il tend à s'éloigner du lieu où il éprouve la plus grande pression, en est empêché par la résistance du vase du côté opposé, la pression devient égale de toutes parts, dans un instant & sans aucun mouvement local: & dans le moment les parties du fluide se pressent mutuellement & également par le cinquième cas, & sont en repos entre elles. *C. Q. F. D.*

Cor. D'où on voit que les mouvemens des parties du fluide entr'elles ne peuvent changer par une pression exercée de toutes

parts sur la superficie entiere du fluide, à moins que la figure de cette superficie ne change en quelque endroit, ou que toutes les parties du fluide en se pressant mutuellement avec plus ou moins de force coulent plus ou moins facilement les unes sur les autres.

PROPOSITION XX. THÉORÈME XV.

Si les parties d'une sphere fluide & homogène qui enveloppe un fond sphérique qui a le même centre, gravitent également vers ce centre lorsqu'elles en sont à égale distance ; ce fonds soutiendra le poids d'un cylindre, dont la base est égale à la superficie de ce fond, & la hauteur est la même que celle du fluide incumbant.

Fig. 31.

Que DHM soit la superficie de ce fond, & AEI la superficie supérieure du fluide. Que ce fluide soit partagé par un nombre innombrable de superficies sphériques BFK , CGL dans des orbes concentriques également épaisses ; & que la force de la gravité soit supposée agir seulement sur la superficie supérieure d'un orbe quelconque, ses actions étant égales sur les parties égales de toutes ces superficies. La superficie de dessus AE est donc pressée par la seule force de sa propre gravité, par laquelle toutes les parties de l'orbe supérieur & la seconde superficie BFK (par la Prop. 19.), selon sa grandeur, sont également pressées. Mais outre cela, la seconde superficie BFK est pressée par la force de sa propre gravité, qui, ajoutée à la première, compose une pression double. La troisième superficie CGL sera pressée selon sa grandeur par cette pression, & de plus par la force de sa propre gravité, c'est-à-dire, par une pression triple : & de même, la quatrième superficie éprouvera une pression quadruple, la cinquième une quintuple, & ainsi de suite. La pression que chaque superficie éprouve, n'est donc pas comme la quantité solide du fluide qui s'appuie sur elle, mais comme le nombre des orbes jusqu'à la surface supé-

rieure du fluide ; & elle est égale à la gravité de l'orbe inférieur multiplié par le nombre des orbes : c'est-à-dire , à la gravité du solide dont la dernière raison au cylindre déterminé est la raison d'égalité , (supposé que le nombre des orbes croisse & que leur épaisseur diminue à l'infini , en sorte que l'action de la gravité de la superficie inférieure à la supérieure devienne continue). La superficie inférieure soutiendra donc le cylindre dont on vient de parler. *C. Q. F. D.*

Et par un raisonnement semblable on prouveroit la proposition , dans le cas où la gravité décroît dans une raison quelconque de la distance au centre , & dans celui où le fluide est plus rare en enhaut , & plus dense en embas. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc , le fond n'est pas pressé par tout le poids du fluide incumbant , mais il soutient seulement cette partie du poids du fluide dont on a parlé dans cette Proposition ; le reste de son poids étant soutenu par la figure en voute du fluide.

Cor. 2. Mais la quantité de la pression est toujours la même à des distances égales du centre , soit que la superficie pressée soit parallèle à l'horison , soit qu'elle lui soit perpendiculaire ou oblique , soit que le fluide s'élève perpendiculairement dans une ligne droite au-dessus de la superficie pressée , soit qu'il serpente obliquement dans des canaux & des cavités qui soient de formes régulières ou irrégulières , & qui soient larges ou étroites , on trouve que toutes ces circonstances ne changent rien à la pression , en appliquant la démonstration de ce Théorème aux différens cas où se trouvent les fluides.

Cor. 3. On prouve aussi par la même démonstration (& par la Prop. 19.) que les parties d'un fluide pesant n'acquièrent aucun mouvement entr'elles par la pression d'un poids incumbant , pourvu qu'on fasse abstraction du mouvement qui vient de la condensation.

Cor. 4. Et par conséquent si un autre corps de la même gravité spécifique , mais incapable de condensation , est plongé dans

ce fluide, il n'acquérera aucun mouvement par la pression du poids incumbant : il ne descendra point, il ne montera point, & il ne sera point contraint à changer sa forme. S'il est sphérique, il demeurera sphérique malgré la pression : s'il est quarré, il demeurera quarré : & cela, soit qu'il soit mol ou très-fluide ; soit qu'il nâge librement dans le fluide, soit qu'il s'appuie sur le fond. Or toute partie interne quelconque d'un fluide est dans le même cas qu'un corps plongé, & il en est de même de tous les corps plongés qui ont la même grandeur, la même figure, & la même gravité spécifique. Si le corps plongé devenoit fluide en conservant son poids ; ce corps, s'il étoit monté ou descendu, ou s'il avoit pris une nouvelle forme auparavant par la pression du fluide, seroit encore forcé de monter ou de descendre, ou de prendre une nouvelle forme : & cela, parce que sa gravité & toutes les autres causes de mouvement subsistent. Or (par le cas 5. de la Prop. 19.) il seroit en repos & conserveroit sa figure. Donc, &c.

Cor. 5. Donc le corps qui est spécifiquement plus pesant que le fluide qui lui est contigu ira au fond, & s'il est spécifiquement plus léger, il montera sur la superficie, ce qui produira du mouvement, & un changement de figure, tels que l'excès ou le défaut de la gravité de ce corps les peut produire. Car cet excès, ou ce défaut sont la cause de l'impulsion que reçoit le corps, lequel autrement eût été en équilibre avec les parties du fluide ; & cet excès ou ce défaut de gravité du corps plongé peut être comparé avec l'excès ou le défaut de poids des corps qui sont dans l'un ou l'autre bassin d'une balance.

Cor. 6. Les corps qui sont dans des fluides ont donc une double gravité, l'une vraie & absolue, l'autre apparente & relative. La gravité absolue est la force totale par laquelle le corps tend en embas : la relative est l'excès de la gravité du corps par lequel il tend plus fortement en embas que le fluide qui l'environne. Les parties des fluides & celles de tous les corps gravi-

rent toutes dans leurs lieux par une gravité du premier genre : donc tous leurs poids réunis composent le poids total. Car tout corps est pesant comme on peut l'éprouver dans des vases pleins de liqueur, & le poids du tout est égal aux poids de toutes les parties & en est par conséquent composé. Par la gravité du second genre, les corps ne gravitent point dans leurs lieux, c'est-à-dire, qu'étant comparés entre eux, ils ne sont pas plus pesants les uns que les autres, mais par les efforts mutuels qu'ils font pour descendre ils s'opposent mutuellement à leur chute & demeurent chacun à leur place comme s'ils n'avoient aucune gravité. Le peuple croit que les corps qui sont soutenus dans l'air ne sont point pesants. Et il croit pesants ceux qui tombent parce qu'ils ne sont pas soutenus par le poids de l'air. Ainsi, selon le peuple, le poids des corps n'est autre chose que l'excès de leur poids absolu, sur le poids de l'air. Et c'est pourquoi il appelle *corps légers* ceux qui sont moins pesants que l'air, & qui s'élèvent parce que l'air est plus pesant qu'eux. Mais ces corps ne sont légers que comparativement, car ils descendent dans le vuide. De même les corps qui montent ou descendent dans l'eau, à raison de leur plus grande ou de leur moindre gravité, sont comparativement, & en apparence les uns légers & les autres pesants, & leur pesanteur ou leur légèreté comparative & apparente, est l'excès ou le défaut dont leur gravité vraie & absolue surpasse ou est surpassée par celle de l'eau. Ceux qui ne descendent ni ne remontent, quoiqu'ils augmentent de leur poids absolu le poids total qu'ils composent avec l'eau, ne pesent cependant point dans l'eau comparativement & dans le sens du peuple. Car la démonstration est la même pour tous ces cas.

Cor. 7. Ce qu'on vient de démontrer pour la gravité a aussi lieu dans toutes les autres espèces quelconques des forces centripètes.

Cor. 8. Ainsi, si le milieu dans lequel le corps se meut, est pressé ou par sa propre gravité ou par quelque autre force centri-

pète, & que le corps qui y est placé soit pressé plus fortement par la même force; la différence de ces forces est cette force motrice que nous avons considérée dans les Propositions précédentes comme force centripète. Et si le corps est moins pressé par cette force on doit considérer la différence de ces forces comme une force centrifuge.

Cor. 9. Mais comme les fluides, en pressant les corps qui y sont plongés, ne changent pas leur figure extérieure, il est clair de plus (*Cor. de la Prop. 19.*) qu'ils ne changent point la situation de leurs parties internes entr'elles : & par conséquent, si des animaux sont plongés, & que toute sensation vienne du mouvement des parties, les parties du fluide ne blesseront point les animaux plongés, & n'exciteront en eux aucune sensation, si ce n'est en tant qu'ils peuvent être condensés par la compression. Et c'est la même chose pour un système quelconque de corps environnés d'un fluide qui les comprime. Car toutes les parties de ce système seront agitées des mêmes mouvemens que s'ils étoient dans le vuide, & qu'ils n'eussent que leur seule gravité comparative, si ce n'est que ce fluide résistât un peu à leurs mouvemens, ou qu'il contribuât à attacher leurs parties ensemble par la compression.

PROPOSITION XXI. THÉORÈME XVI.

Si la densité d'un fluide quelconque est proportionnelle à sa compression, & que ses parties soient attirées en embas par une force centripète réciproquement proportionnelle à leurs distances au centre : je dis que si l'on prend ces distances continuellement proportionnelles, les densités de ce fluide à ces mêmes distances seront aussi continuellement proportionnelles.

Fig. 32. Que ATV représente le fond sphérique sur lequel le fluide s'appuie, que S soit le centre, & que SA, SB, SC, SD, SE, SF , &c. soient des distances continuellement proportionnelles

nelles. Soient élevées les perpendiculaires AH , BI , CK , DL , EM , FN , &c. qui soient comme les densités du milieu aux lieux A , B , C , D , E , F , &c. les gravités spécifiques dans ces mêmes lieux seront comme $\frac{AH}{AS}$, $\frac{BI}{BS}$, $\frac{CK}{CS}$ &c. Ou, ce qui revient au même, comme $\frac{AH}{AB}$, $\frac{BI}{BC}$, $\frac{CK}{CD}$, &c. Supposiez premièrement que ces gravités soient continuées uniformément de A à B , de B à C , de C à D , &c. les décréments se faisant par degrés aux points B , C , D , &c. & ces gravités multipliées par les hauteurs AB , BC , CD , &c. formeront les pressions AH , BI , CK , &c. par lesquelles le fond ATV est pressé (selon le Théor. 15.) : la particule A soutiendra donc toutes les pressions AH , BI , CK , DL en allant à l'infini ; & la particule B toutes les pressions hors la première AH ; & la particule C toutes les pressions hors les deux premières AH , BI , &c. ainsi de suite. Donc la densité AH de la première particule A est à la densité BI de la seconde particule B comme la somme de toutes les densités $AH + BI + CK + DL$ à l'infini, à la somme de toutes les densités $BI + CK + DL$ &c. Et BI densité de la seconde B est à CK densité de la troisième C , comme la somme de toutes les densités $BI + CK + DL$ &c. à la somme de toutes les densités $CK + DL$ &c. Or ces sommes sont proportionnelles à leurs différences AH , BI , CK , &c. & par conséquent elles sont continuellement proportionnelles, (par le Lemme 1. de ce Liv.) donc les différences AH , BI , CK , &c. qui sont proportionnelles aux sommes, sont aussi continuellement proportionnelles. C'est pourquoi, comme les densités dans les lieux A , B , C , &c. sont comme AH , BI , CK , &c. elles seront aussi continuellement proportionnelles. Qu'on les prenne par sauts, & aux distances SA , SC , SE , continuellement proportionnelles, les densités AH , CK , EM seront continuellement proportionnelles, & par le même raisonnement, aux dif.

tances quelconques continuellement proportionnelles SA, SD, SG , les densités AH, DL, GO seront continuellement proportionnelles.

Fig. 32.

Que les points A, B, C, D, E , &c. se rapprochent à présent, enforte que la progression des gravités spécifiques, depuis le fond A jusqu'à la partie supérieure du fluide, devienne continue, les densités AH, DL, GO , qui étoient toujours continuellement proportionnelles dans des distances quelconques SA, SD, SG , demeureront continuellement proportionnelles. *C. Q. F. D.*

Cor. Delà, si la densité du fluide est donnée en deux lieux comme A & E , on peut trouver sa densité dans un lieu quelconque Q .

Fig. 33.

Du centre S , soit décrite une hyperbole dont les asymptotes soient les perpendiculaires SQ, SX , & qui coupe les lignes AH, EM, QT perpendiculaires à l'asymptote SQ en a, e, q , ainsi que les perpendiculaires HX, MY, TZ , à l'asymptote SX , en h, m & t . Soit l'aire $YmtZ$ à l'aire donnée $YmhX$ comme l'aire donnée $EeqQ$ à l'aire donnée $EeaA$; la ligne Zt prolongée coupera la ligne QT proportionnellement à la densité. Car si les lignes SA, SE, SQ sont continuellement proportionnelles, les aires $EeqQ, EeaA$ seront égales, & de-là, les aires $YmtZ, XhmY$, qui sont proportionnelles aux premières, seront aussi égales, & les lignes SX, SY, SZ , c'est-à-dire, AH, EM, QT seront continuellement proportionnelles, comme le théorème le demande. Et si les lignes SA, SE, SQ ont un autre ordre quelconque dans une série de quantités continuellement proportionnelles, les lignes AH, EM, QT , à cause de la proportionnalité des aires hyperboliques, auront le même ordre dans une autre série de quantités continuellement proportionnelles.

La densité d'un fluide quelconque étant proportionnelle à sa compression, & ses parties étant attirées en embas par une gravité réciproquement proportionnelle aux quarrés de leurs distances au centre : je dis que si l'on prend ces distances dans une progression harmonique les densités du fluide à ces distances seront en progression géométrique.

Que S représente le centre, & SA, SB, SC, SD, SE les distances en progression géométrique. Soient élevées les perpendiculaires AH, BI, CK , &c. qui soient comme les densités du fluide aux lieux A, B, C, D, E , &c. & ses gravités spécifiques dans les mêmes lieux seront $\frac{AH}{SA^2}, \frac{BI}{SB^2}, \frac{CK}{SC^2}$, &c. Supposez que ces gravités soient continuées uniformement, la première de A à B , la seconde de B à C , la troisième de C à D , &c. en les multipliant par les hauteurs AB, BC, CD, DE , &c. ou, ce qui est le même, par les distances SA, SB, SC , &c. proportionnelles à ces hauteurs, on aura les exposans des pressions $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, &c. C'est pourquoi, comme les densités sont proportionnelles à la somme de ces pressions, les différences des densités $AH - BI, BI - CK$, &c. seront comme les différences des sommes $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}, \frac{CK}{SC}$, &c.

Fig. 34.

Du centre S soit décrit une hyperbole quelconque dont les asymptotes soient SA, Sx , & qui coupe les lignes AH, BI, CK , &c. qui sont perpendiculaires, en a, b, c , &c. sur l'asymptote SA prolongée, ainsi que les lignes Ht, Iu, Kw perpendiculaires en h, i, k &c. sur l'asymptote Sx prolongée, & les différences tu, uw , &c. des densités seront proportionnelles à $\frac{AH}{SA}, \frac{BI}{SB}$, &c. & les rectangles $tu \times th$,

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. 34.

$uw \times ui$, &c. ou tp, uq &c. seront comme $\frac{AH \times th}{SA}, \frac{BI \times ui}{SB}$

&c. c'est-à-dire, comme Aa, Bb , &c. Car, par la nature de l'hyperbole, $SA:AH$ ou $St::th:Aa$, donc $\frac{AH \times th}{SA} = Aa$.

Et par le même raisonnement, $\frac{BI \times ui}{SB} = Bb$, &c. Or Aa ,

Bb, Cc , &c. sont continuellement proportionnelles, & par conséquent elles sont proportionnelles à leurs différences $Aa - Bb$, $Bb - Cc$, &c. & par conséquent les rectangles tp, uq , &c. sont aussi proportionnels à ces différences, ainsi que les sommes des rectangles $tp + uq$ ou $tp + uq + wr$, aux sommes des différences $Aa - Cc$ ou $Aa - Dd$. Supposé qu'il y ait beaucoup de termes de cette sorte, & la somme de toutes les différences comme $Aa - Ff$ sera proportionnelle à la somme de tous les rectangles comme $\sum thn$. Qu'on augmente le nombre des termes, & qu'on diminue la distance des points A, B, C , &c. à l'infini, ces rectangles deviendront égaux à l'aire hyperbolique $\sum thn$, & par conséquent la différence $Aa - Ff$ est proportionnelle à cette aire. Soient prises à présent les distances quelconques SA, SD, SF en progression harmonique, & les différences $Aa - Dd, Dd - Ff$ seront égales; & par conséquent, les aires $thlx, xlnz$ proportionnelles à ces différences seront égales entr'elles, & les densités St, Sx, Sz , c'est-à-dire, AH, DL, FN , seront continuellement proportionnelles. *C. Q. F. D.*

Cor. Delà, si deux densités quelconques du fluide sont données comme AH & BI , l'aire $thiu$, répondant à la différence tu de ces densités sera donnée; & par-là, on trouvera la densité FN à une hauteur quelconque SF , en prenant l'aire $thnz$ à cette aire donnée $thiu$ comme la différence $Aa - Ff$ est à la différence $Aa - Bb$.

On peut prouver par le même raisonnement, que si la gravité des particules du fluide diminue en raison triplée des distances au centre, & qu'on prenne les réciproques des quarrés des distances SA , SB , SC , &c. (c'est-à-dire, $\frac{SA^3}{SA^2}$, $\frac{SA^3}{SB^2}$, $\frac{SA^3}{SC^2}$.) en progression arithmétique ; les densités AH , BI , CK , &c. seront en progression géométrique. Et si la gravité diminue en raison quadruplée des distances, & que les réciproques des cubes des distances (c'est-à-dire $\frac{SA^4}{SA^3}$, $\frac{SA^4}{SB^3}$, $\frac{SA^4}{SC^3}$, &c.) soient prises en progression arithmétique ; les densités AH , BI , CK , &c. seront en progression géométrique. Et ainsi à l'infini. De plus, si la gravité des particules du fluide est la même à toutes les distances, & que les distances soient en progression arithmétique, les densités seront en progression géométrique, comme le célèbre *Edmond Halley* l'a trouvé. Si la gravité est comme la distance & que les quarrés des distances soient en progression arithmétique, les densités seront en progression géométrique. Et de même à l'infini. Cela arrive ainsi lorsque la densité du fluide condensé par la compression est comme la force comprimante, ou, ce qui est la même chose, lorsque l'espace occupé par le fluide est réciproquement comme cette force. On peut supposer d'autres loix de condensation, comme, par exemple, que le cube de la force comprimante soit comme la quatrième puissance de la densité, ou que la raison triplée de la force soit la même que la raison quadruplée de la densité. Auquel cas, si la gravité est réciproquement comme le quarré de la distance au centre, la densité sera réciproquement comme le cube de la distance. Supposez à présent que le cube de la force comprimante soit comme la cinquième puissance de la densité, si la gravité est réciproquement comme le quarré de la distance, la densité sera réciproquement en raison ses-

quiplée de la distance. Supposez que la force comprimante soit en raison doublée de la densité & la gravité réciproquement en raison doublée de la distance, la densité sera réciproquement comme la distance. Il seroit trop long de parcourir tous les cas. Au reste, il est certain, par l'expérience, que la densité de l'air est, ou exactement, ou à peu près, comme la force comprimante; & par conséquent, la densité de l'air de l'atmosphère de la terre est comme le poids de tout l'air incumbant, c'est-à-dire, comme la hauteur du mercure dans le Barometre.

PROPOSITION XXIII. THÉORÈME XVIII.

Si la densité d'un fluide, composé de parties qui se fuient mutuellement, est comme la compression, les forces centrifuges des particules seront réciproquement proportionnelles aux distances à leurs centres. Et au contraire, les particules dont les forces sont réciproquement proportionnelles aux distances à leur centre, & qui se fuient mutuellement, composent un fluide élastique, dont la densité est proportionnelle à la compression.

Fig. 35.

Supposez qu'un fluide soit renfermé dans un espace cubique ACE , & qu'ensuite il soit réduit par la compression dans un espace moindre ace ; les distances des particules, qui ont la même position entr'elles dans l'un & l'autre espace, seront comme les côtés AB , ab de ces cubes; & les densités des milieux seront réciproquement comme les capacités AB^3 , & ab^3 . Dans la face $ABCD$ du plus grand cube, soit pris le quarré DP égal à la face db du petit cube; & par l'hypothèse, la pression que le quarré DP exerce sur le fluide qui y est renfermé sera à la pression par laquelle ce quarré db presse le fluide inclus, comme les densités du milieu sont entr'elles, c'est-à-dire, comme ab^3 à AB^3 . Mais la pression, par laquelle le quarré DB comprime le fluide inclus, est à la pression par laquelle il est comprimé par le quarré DP , comme le quarré DB au quarré DP .

c'est-à-dire, comme AB^2 à ab^2 . Donc la pression par laquelle le quarré DB comprime le fluide est à la pression par laquelle il est comprimé par le quarré db , comme ab à AB . Les surfaces FGH , $fg h$, qui sont menées dans l'intérieur des cubes, partagent le fluide en deux parties, & se pressent mutuellement par les mêmes forces par lesquelles elles sont pressées par les surfaces AC , ac , c'est-à-dire, dans la proportion de ab à AB : donc les forces centrifuges qui soutiennent ces pressions sont dans la même raison.

Comme les particules sont en même nombre & également situées dans l'un & l'autre cube, les forces que toutes les particules exercent suivant les surfaces FHG , $fh g$ sur toutes les particules sont comme celles que chacune d'elles exerce sur chacune. Donc, les forces que chacune exerce sur chacune suivant le plan FGH dans le plus grand cube, sont aux forces que chacune exerce sur chacune dans le plus petit cube suivant le plan $fg h$, comme ab à AB , c'est-à-dire, réciproquement comme les distances des particules entr'elles. *C. Q. F. D.*

Et réciproquement, si les forces de chacune des particules sont en raison renversée des distances, c'est-à-dire, réciproquement comme les côtés AB , ab des cubes; les sommes des forces seront dans la même raison, & les pressions des côtés DB , db , seront comme les sommes des forces; & la pression du quarré DP sera à la pression du côté DB comme ab^2 à AB^2 , & la pression du quarré DP est à la pression du côté db comme ab à AB ; c'est-à-dire, que la force de la compression est à la force de la compression comme la densité à la densité. *C. Q. F. D.*

S C H O L I E.

Par le même raisonnement, si les forces centrifuges des particules sont réciproquement en raison doublée des distances entre les centres, les cubes des forces comprimantes seront comme le quarré quarré des densités. Si les forces centrifuges

LIVRE
SECOND.

Fig. 35.

font réciproquement en raison triplée ou quadruplée des distances, les cubes des forces comprimantes feront comme la sixième ou la neuvième puissance des densités. Et généralement, si on prend D pour la distance, E pour la densité du fluide comprimé, & que les forces centrifuges soient réciproquement comme la puissance quelconque d'une distance D^n ; les forces comprimantes feront comme les racines cubiques de la puissance E^{n+2} , & réciproquement. Tout cela doit s'entendre des forces centrifuges des particules, lesquelles ne s'exercent que sur les particules les plus proches, ou ne passent gueres au-delà. Nous en avons un exemple dans les corps magnétiques, dont la force attractive ne s'étend pas au-delà des corps du même genre, & qui sont très-proches. Car la vertu magnétique ne s'étend pas au-delà d'une petite lame de fer qu'on interpose entre le corps & l'aimant, & elle se termine presque entierement à ce fer, puisque les corps placés au-delà de cette lame ne sont pas tant attirés par l'aimant que par la lame de fer. Si on conçoit de même des particules qui en fuient d'autres du même genre qu'elles, & dont elles sont très-proches, & qu'on imagine qu'elles n'exercent aucune force sur les particules plus éloignées, on formera par l'assemblage infini de ces particules les fluides dont il s'agit dans cette Proposition. Que s'il y a des particules dont la force s'étende à l'infini, il faudra une plus grande force pour opérer la même condensation d'une plus grande quantité de fluide. C'est une question qui regarde la physique que de sçavoir si les fluides élastiques sont composés de parties qui se fuient mutuellement. Nous avons démontré ici mathématiquement la propriété des fluides composés de particules de cette espece, afin de donner aux Physiciens les moyens de traiter cette matiere.



SIXIÈME SECTION.

Du Mouvement & de la résistance des corps oscillans.

PROPOSITION XXIV. THÉORÈME XIX.

Les quantités de matière dans les corps oscillans & dont les centres d'oscillation sont également distans du centre de suspension, sont en raison composée de la raison des poids, & de la raison doublée des temps des oscillations dans le vuide.

Car la vitesse qu'une force donnée peut produire dans une matière donnée en un temps donné est comme le temps & la force directement, & comme la quantité de matière inversement. Plus la force est grande, plus le temps est long, moins il y a de matière, & plus il y aura de vitesse produite : ce qui est clair par la seconde loy du mouvement. Car si les pendules sont de même longueur, les forces motrices sont comme les poids dans les lieux également distans de la perpendiculaire ; donc si deux corps décrivent en oscillant des arcs égaux, & que ces arcs soient divisés en parties égales ; comme les temps dans lesquels ces corps décrivent chaque partie correspondante des arcs sont comme les temps entiers des oscillations, les vitesses seront entre elles dans les parties correspondantes des oscillations, comme les forces motrices & les temps entiers des oscillations directement, & comme les quantités de matière réciproquement : donc les quantités de matière sont comme les forces, & les temps des oscillations directement, & réciproquement comme les vitesses. Mais les vitesses sont réciproquement comme les temps, donc les temps sont directement, & les vitesses sont réciproquement comme les quarrés des temps, & par conséquent les quantités de matière sont comme les forces motrices, & les quarrés des temps, c'est-

à-dire, comme les poids & les quarrés des temps. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc si les temps sont égaux, les quantités de matiere dans chaque corps seront comme les poids.

Cor. 2. Si les poids sont égaux, les quantités de matiere seront comme les quarrés des temps.

Cor. 3. Si les quantités de matiere sont égales, les poids seront réciproquement comme les quarrés des temps.

Cor. 4. Puisque les quarrés des temps, toutes choses égales, sont comme les longueurs des pendules; il est clair que si les temps sont égaux, ainsi que les quantités de matiere, les poids seront comme les longueurs des pendules.

Cor. 5. Et généralement, la quantité de matiere du pendule est comme le poids & le quarré du temps directement, & inversement comme la longueur du pendule.

Cor. 6. Mais dans un milieu non résistant la quantité de matiere du pendule est comme le poids comparatif & le quarré du temps directement, & comme la longueur du pendule inversement. Car le poids comparatif est la force motrice du corps dans un milieu quelconque pesant, comme je l'ai expliqué ci-dessus; donc le poids absolu dans le vuide est la même chose que dans un tel milieu non résistant.

Cor. 7. Et delà on voit tant la maniere de comparer les corps entre eux quant à la quantité de matiere de chacun; que celle de comparer les poids du même corps en divers lieux, pour connoître la variation de la gravité. Et par des expériences très-exactes j'ai toujours trouvé que la quantité de matiere dans chaque corps étoit proportionnelle à leurs poids.

PROPOSITION XXV. THÉORÈME XX.

Les corps suspendus par des fils, & qui se meuvent dans un milieu quelconque qui leur résiste en raison des momens du temps, & ceux qui se meuvent dans un milieu non résistant, lequel a la même gravité spécifique que ces corps, achevent leurs oscillations en des temps

égaux dans une cycloïde . & décrivent en même temps des arcs proportionnels au temps.

LIVRE
SECOND.

Fig. 36.

Soit AB un arc de cycloïde que le corps D décrit en oscillant pendant un temps quelconque dans un milieu non résistant. Soit cet arc coupé en deux au point C , en sorte que C soit son point le plus bas ; & la force accélératrice par laquelle le corps est pressé à un point quelconque D , ou d , ou E , fera comme la longueur de l'arc CD , ou Cd , ou CE . Soit représentée cette force par le même arc ; la résistance étant comme le moment du temps elle sera donnée. Supposez qu'elle soit représentée par la partie donnée CO de l'arc de cycloïde , en prenant l'arc Od dans la même raison à l'arc CD que l'arc OB a à l'arc CB : la force par laquelle le corps est pressé en d dans un milieu résistant , laquelle est l'excès de la force Cd sur la résistance CO , fera représentée par l'arc Od , & fera par conséquent à la force par laquelle le corps D sera pressé dans un milieu non résistant , dans le lieu D , comme l'arc Od à l'arc CD ; & par conséquent dans un lieu B , comme l'arc OB à l'arc CB . Donc si deux corps D & d partent du lieu B , & sont pressés par ces forces, il est clair que ces forces sont au commencement comme les arcs CB & OB , & que les premières vitesses & les arcs premièrement décrits seront dans la même raison. Soient ces arcs BD & Bd , les arcs restans CD , Od seront dans la même raison. Et par conséquent les forces qui sont proportionnelles à CD , Od demeureront dans la même raison qu'au commencement, & par conséquent les corps continueront à décrire en même temps des arcs dans la même raison. Donc les forces, les vitesses, & les arcs restans CD , Od seront toujours comme les arcs entiers CB , OB , & par conséquent les arcs restans seront décrits en même temps. C'est pourquoi deux corps D & d parviendront en même temps aux lieux C & O , l'un dans un milieu non résistant au lieu C , & l'autre dans un milieu résistant au lieu O . Mais les vitesses en C & en O étant comme les arcs CB , OB ; les arcs

que les corps décriront en même temps en avançant au-delà seront dans la même raison. Soient ces arcs CE & Oe . La force avec laquelle un corps D , dans un milieu non résistant, est retardé en E est comme CE , & la force avec laquelle un corps d est retardé au point e dans un milieu résistant est comme la somme de la force Ce & de la résistance CO , c'est-à-dire, comme Oe ; donc les forces qui retardent les corps sont comme les petits arcs CE , Oe , lesquels sont proportionnels aux arcs CB , OB ; donc les vitesses & les arcs qu'elles font décrire sont toujours dans cette même raison donnée des arcs CB & OB ; & par conséquent si on prend les arcs entiers AB , aB dans la même raison, les corps D & d décriront en même temps ces arcs, & perdront en même temps tout leur mouvement aux lieux A & a . Les oscillations entières sont donc isochrones, & les parties quelconques BD , Bd ou BE , Be des arcs qui sont décrites en même temps sont proportionnelles aux arcs entiers BA , ba . $C. Q. F. D.$

Cor. Donc, ce n'est pas dans le point le plus bas C que le mouvement est le plus prompt dans un milieu qui résiste, mais dans le point O dans lequel l'arc total décrit aB est coupé en deux parties égales; & le corps en avançant ensuite vers a est retardé par les mêmes degrés par lesquels il étoit accéléré auparavant en descendant de B en O .

PROPOSITION XXVI. THÉORÈME XXI.

Les corps suspendus qui éprouvent une résistance en raison des vitesses, & qui oscillent dans des arcs de cycloïde, ont leurs oscillations isochrones.

Car si deux corps également distans des centres de suspension décrivent, en oscillant, des arcs inégaux, & que les vitesses dans les parties correspondantes des arcs soient entr'elles comme les arcs entiers, les résistances proportionnelles aux vitesses seront aussi entr'elles comme ces mêmes arcs. Ainsi, si des forces motrices

qui font l'effet de la gravité, lesquelles font comme ces mêmes arcs, on ôte, ou on leur ajoute ces résistances, les différences ou les sommes seront entr'elles dans la même raison des arcs : or comme les incréments, ou les décréments des vitesses font comme ces différences ou ces sommes, les vitesses seront toujours comme les arcs entiers ; donc si les vitesses font dans quelque cas comme les arcs entiers, elles demeureront toujours dans cette même raison. Mais dans le commencement du mouvement, où les corps commencent à descendre & à décrire ces arcs, les forces étant proportionnelles aux arcs produiront des vitesses qui seront aussi proportionnelles à ces arcs ; donc les vitesses seront toujours comme les arcs entiers à décrire, & par conséquent ces arcs seront décrits en même temps. C. Q. F. D.

PROPOSITION XXVII. THÉOREME XXII.

Si les corps suspendus à des fils éprouvent une résistance en raison doublée des vitesses, les différences entre les temps des oscillations dans un milieu résistant, & les temps des oscillations dans un milieu non résistant de la même gravité spécifique, seront à peu près proportionnelles aux arcs décrits en oscillant.

Car supposez que des pendules égaux décrivent dans un milieu résistant des arcs inégaux A, B ; la résistance que le corps éprouve dans l'arc A fera à la résistance qu'il éprouve dans la partie correspondante de l'arc B , en raison doublée des vitesses, c'est-à-dire, comme AA à BB à peu près. Si la résistance dans l'arc B étoit à la résistance dans l'arc A comme AB à AA , les temps dans les arcs A & B feroient égaux, par la Proposition précédente. Donc la résistance AA dans l'arc A , ou la résistance AB dans l'arc B produit l'excès du temps dans l'arc A sur le temps dans un milieu non résistant ; & la résistance BB produit l'excès du temps dans l'arc B sur le temps dans un milieu non résistant. Et ces excès font comme les forces efficientes AB & BB à peu près, c'est-à-dire, comme les arcs A & B . C. Q. F. D.

Fig. 36.

Cor. 1. De là on peut connoître par les temps des oscillations qui se font dans un milieu résistant & dans des arcs inégaux, les temps des oscillations dans un milieu non résistant de la même gravité spécifique. Car la différence des temps sera à l'excès du temps dans le plus petit arc sur le temps dans un milieu non résistant, comme la différence des arcs au plus petit arc.

Cor. 2. Plus les oscillations sont courtes, & plus elles sont isochrones, & celles qui sont très-courtes se font à peu près dans les mêmes temps que si elles se faisoient dans un milieu qui ne résistât point. Mais les temps des oscillations qui se font dans de plus grands arcs sont un peu plus longs, à cause que la résistance que le corps éprouve en descendant, par laquelle le temps est allongé, est plus grande, eu égard à la longueur parcourue en descendant, que la résistance dans l'ascension subséquente, par laquelle résistance le temps est diminué. Mais les temps des oscillations tant les plus longues que les plus courtes, semblent être un peu augmentés par le mouvement du milieu; car le milieu résiste un peu moins aux corps retardés à raison de la vitesse, & un peu plus à ceux qui sont accélérés qu'à ceux qui se meuvent uniformément : & cela, parce que le milieu, par le mouvement qu'il reçoit des corps en allant du même côté qu'eux, est plus agité dans le premier cas, & moins dans le second ; & que par conséquent il conspire plus ou moins avec le mouvement des corps. Il résiste donc plus aux pendules lorsqu'ils descendent, & moins lorsqu'ils remontent, à raison de la vitesse, & par ces deux causes le temps est allongé.

PROPOSITION XXVIII. THÉORÈME XXIII.

Si un pendule éprouve une résistance en raison des momens du temps, lorsqu'il oscille dans une cycloïde, cette résistance sera à la force de la gravité, comme l'excès de l'arc décrit dans sa descente entière sur l'arc décrit dans l'ascension subséquente, est au double de la longueur du pendule.

Fig. 36. Que *BC* représente l'arc décrit dans la descente, *Ca* l'arc

décrit dans l'ascension, & Aa la différence de ces arcs; & en supposant les constructions & les démonstrations de la Prop. 25. la force qui pressera le corps oscillant, fera dans un lieu quelconque D à la force de la résistance, comme l'arc CD à l'arc CO , moitié de cette différence Aa . Donc la force qui presse le corps oscillant dans la naissance de la cycloïde, ou dans le point le plus haut, c'est-à-dire, la force de la gravité, fera à la résistance, comme l'arc de cycloïde, entre le point le plus haut & le point le plus bas C , est à l'arc CO , c'est-à-dire, (si on double ces arcs) comme l'arc de toute la cycloïde, ou la double longueur du pendule à l'arc Aa . C. Q. F. D.

LIVRE
SECOND.

Fig. 36.

PROPOSITION XXIX. PROBLÈME VI.

Supposé qu'un corps qui oscille dans une cycloïde éprouve une résistance en raison doublée de la vitesse; trouver la résistance à chacun des lieux.

Soit Ba l'arc décrit pendant une oscillation entière, C le point le plus bas de la cycloïde, & CZ la moitié de l'arc de la cycloïde entière égale à la longueur du pendule, & qu'on cherche la résistance que le corps éprouve dans un lieu quelconque D . Soit coupée la droite infinie OQ dans les points O, S, P, Q , selon cette loi, que (si on élève les perpendiculaires OK, ST, PI, QE , & que du centre O , on décrive l'hyperbole $TIGE$ qui coupe les perpendiculaires ST, PI, QE en T, I & E , & dont les asymptotes soient OK, OQ ; & que par le point I on tire KF parallèle à l'asymptote OQ & rencontrant l'asymptote OK en K & les perpendiculaires ST, QE en L & F) l'aire hyperbolique $PIEQ$, soit à l'aire hyperbolique $PITS$, comme l'arc BC décrit dans la descente du corps, à l'arc Ca décrit dans son ascension, & que l'aire IEF soit à l'aire ILT comme OQ à OS . Ensuite soit coupée par la perpendiculaire MN l'aire hyperbolique $PINM$ qui soit à l'aire hyperbolique $PIEQ$ comme l'arc CZ à l'arc BC décrit dans la descente. Si la perpendiculaire RG

Fig. 37. & 38.

coupe l'aire hyperbolique $PIGR$ qui soit à l'aire $PIEQ$ comme l'arc quelconque CD à l'arc BC décrit pendant la descente entière; la résistance au lieu D sera à la force de la gravité comme l'aire $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ à l'aire $PINM$.

Car comme les forces venant de la gravité par lesquelles le corps est pressé dans les lieux Z, B, D, a sont comme les arcs CZ, CB, CD, Ca , & que ces arcs sont comme les aires $PINM, PIEQ, PIGR, PITS$; soient exprimées respectivement par ces aires tant les arcs que les forces. Soit de plus Dd le très-petit espace décrit par le corps en descendant, lequel soit représenté par l'aire très-petite $RGgr$ comprise entre les parallèles RG, rg ; & soit prolongée rg en h , en sorte que $GHhg$ & $RGgr$ soient les décréments contemporains des aires $IGH, PIGR$. Et l'incrément $GHhg - \frac{Rr}{OQ} IEF$, ou $Rr \times HG - \frac{Rr}{OQ} IEF$ de l'aire $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$, sera au décrement $RGgr$ ou $Rr \times RG$ de l'aire $PIGR$, comme $HG - \frac{IEF}{OQ}$ à RG ; & par conséquent comme $OR \times HG - \frac{OR}{OQ} IEF$ à $OR \times GR$ ou $OP \times PI$, c'est-à-dire, (à cause des quantités égales $OR \times HG, OR \times HR - OR \times GR, ORHK - OPIK, PIHR$ & $PIGR + IGH$) comme $PIGR + IGH - \frac{OR}{OQ} IEF$ à $OPIK$. Donc, si on appelle Y l'aire $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ & que le décrement $RGgr$ de l'aire $PIGR$ soit donné, l'incrément de l'aire Y sera comme $PIGR - Y$.

Que si V représente la force de la gravité proportionnelle à l'arc CD à décrire, par laquelle force le corps est pressé en D , & que l'on appelle la résistance R ; $V - R$ fera la force totale par laquelle le corps est pressé en D . L'incrément de la vitesse est

est donc comme $V - R$ & comme la particule de temps dans laquelle il se fait conjointement : mais cette vitesse elle-même est directement comme l'incrément de l'espace décrit en même temps, & inversement comme cette même particule de temps. Ainsi la résistance étant, par l'hypothèse, comme le carré de la vitesse, l'incrément de la résistance (par le Lemme 2.) fera comme la vitesse & comme l'incrément de la vitesse conjointement, c'est-à-dire, comme le moment de l'espace & $V - R$ conjointement ; & par conséquent, si le moment de l'espace est donné, comme $V - R$, c'est-à-dire, comme $P I G R - Z$, en écrivant pour la force V la quantité qui l'exprime $P I G R$, & en exprimant la résistance R par quelqu'autre aire Z .

Donc, l'aire $P I G R$ décroissant uniformément par la soustraction des momens donnés, l'aire Y croîtra dans la raison de $P I G R - Y$, & l'aire Z dans la raison de $P I G R - Z$. Et par conséquent, si les aires Y & Z commencent en même temps, & qu'elles soient égales vers leur commencement, elles continueront à être égales par l'addition des momens égaux, & décroissant ensuite par des momens égaux, elles s'évanouiront en même temps. Et réciproquement, si elles commencent & s'évanouissent en même temps, elles auront des momens égaux, & seront toujours égales : & cela parce que si la résistance Z augmente, la vitesse diminue aussi avec l'arc Cx que le corps décrit dans son ascension ; & le point dans lequel tout le mouvement ainsi que toute la résistance cesse en s'approchant davantage du point C , la résistance s'évanouira plutôt que l'aire Y . Et le contraire arrivera si la résistance diminue.

Or comme l'aire Z commence & finit où la résistance est nulle, c'est-à-dire, dans le commencement du mouvement, où l'arc CD égale l'arc CB , & où la droite RG tombe sur la droite QE , & à la fin du mouvement où l'arc CD égale l'arc CA , & où la droite RG tombe sur la droite ST . L'aire Y ou $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ commence & finit lorsqu'elle est nulle, c'est-à-dire, lorsque

$\frac{OR}{OQ} IEF$ & IGH sont égales, c'est-à-dire, (par la construction)

lorsque la droite RG tombe successivement sur les droites QE & ST . Donc ces aires commencent & s'évanouissent en même temps, & par conséquent elles sont toujours égales. Donc l'aire $\frac{OR}{OQ} IEF - IGH$ est égale à l'aire Z , qui représente la résistance, & par conséquent elle est à l'aire $PINM$, qui représente la gravité, comme la résistance à la gravité. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. La résistance est donc à la gravité dans le lieu le plus bas C , comme l'aire $\frac{OP}{OQ} IEF$ à l'aire $PINM$.

Cor. 2. Et elle devient la plus grande lorsque l'aire $PIHR$ est à l'aire IEF comme OR à OQ . Car, dans ce cas, son moment (c'est-à-dire, $PIGR - Y$) devient nul.

Cor. 3. On connoît aussi par-là la vitesse à chacun des lieux : car elle est en raison sousdoublée de la résistance, & au commencement du mouvement elle est égale à la vitesse du corps qui oscilleroit dans la même cycloïde sans éprouver de résistance.

Au reste, à cause que le calcul par le moyen duquel on peut trouver par cette Proposition la vitesse & la résistance est très-difficile, j'ai cru qu'il étoit à propos d'ajouter la Proposition suivante.

PROPOSITION XXX. THÉORÈME XXIV.

Fig. 39. Si la droite aB est égale à l'arc de cycloïde que le corps décrit en oscillant, & qu'à chacun de ses points D on élève des perpendiculaires DK qui soient à la longueur du pendule comme la résistance que le corps éprouve dans les points correspondans de l'arc est à la force de la gravité : je dis que la différence entre l'arc décrit dans toute la descente & l'arc décrit dans toute l'ascension subséquente, multipliée par la moitié de la somme de ces mêmes

arcs, fera égale à l'aire $BK a$, déterminée par toutes les perpendiculaires $D K$.

LIVRE
SECOND.

Fig. 39.

Car soit représenté, tant l'arc de cycloïde décrit dans une oscillation entière par la droite $a B$ qui lui est égale, que l'arc qui feroit décrit dans le vuide par la longueur $A B$. Soit coupée $A B$ en deux parties égales au point C , ce point C représentera le point le plus bas de la cycloïde, & $C D$ fera comme la partie de la force de la gravité par laquelle le corps est pressé en D suivant la tangente de la cycloïde, & elle aura la même raison à la longueur du pendule que la force en D à la force de la gravité. Soit donc représentée cette force par la longueur $C D$ & la force de la gravité par la longueur du pendule, si on prend $D K$ sur $D E$ qui soit à la longueur du pendule dans la raison de la résistance à la gravité, $D K$ exprimera la résistance. Du centre C & de l'intervalle $C A$ ou $C B$ soit tracé le demi cercle $B E e A$. Que le corps décrive dans un espace de temps très-petit l'espace $D d$, ayant élevé les perpendiculaires $D E, d e$, qui rencontrent la circonférence en E & en e , elles feront comme les vitesses que le corps, en descendant dans le vuide, acquerreroit aux lieux D & d . Ce qui est clair (par la Prop. 52. Liv. 1.) Soient ces vitesses exprimées par les perpendiculaires $D E, d e$; & soit $D F$ la vitesse que le corps acquiert en D en tombant de B dans un milieu résistant. Si du centre C & de l'intervalle $C F$ on décrit le cercle $F f M$ qui rencontre les droites $d e$ & $A B$ en f & M , M sera le lieu auquel il monteroit ensuite s'il n'éprouvoit point de résistance ultérieure, & $d f$ feroit la vitesse qu'il acquerreroit en d . Donc, si $F g$ représente le moment de la vitesse que le corps D perd en parcourant le très-petit espace $D d$ par la résistance du milieu; & qu'on prenne $C N = c g$; N sera le lieu auquel le corps remonteroit ensuite s'il n'éprouvoit point de résistance ultérieure, & $M N$ fera le décrement de l'ascension produit par la diminution de cette vitesse. Abbaissant $F m$ perpendiculairement sur $d f$, le décrement $F g$ de la vitesse $D F$ causé par la résistance $D K$ fera

Fig. 39.

à l'incrément fm de cette même vitesse produit par la force CD comme la force génératrice DK à la force génératrice CD . Mais à cause des triangles semblables Fmf , Fhg , FDC , on a $fm:Fm$ ou $dd::CD:DF$; & par conséquent, $Fg:dd::DK:DF$. Et aussi $Fh:Fg::DF:CF$; & par conséquent, Fh ou $MN:dd::DK:CF$ ou CM . Donc la somme de toutes les $MN \times CM$ sera égale à la somme de toutes les $dd \times DK$. Au point mobile M soit toujours supposé une ordonnée élevée à angle droit, égale à l'indéterminée CM , laquelle parcourt par un mouvement continu toute la ligne Aa ; & le trapeze décrit par ce mouvement ou le rectangle $Aa \times \frac{1}{2}aB$ qui lui est égal sera toujours égal à la somme de toutes les $MN \times CM$, & par conséquent à la somme de toutes les $dd \times DK$, c'est-à-dire, à l'aire $BKVTa$. *C. Q. F. D.*

Cor. Ainsi on peut connoître à peu près par la loi de la résistance & par la différence Aa des arcs Ca , CB la proportion de la résistance à la gravité.

Car si la résistance DK est uniforme, la figure $BKTa$ sera un rectangle sous Ba & DK ; & delà, le rectangle sous $\frac{1}{2}Ba$ & Aa sera égal au rectangle sous Ba & DK , & DK sera égal à $\frac{1}{2}Aa$; c'est pourquoi, comme DK représente la résistance, & que la longueur du pendule représente la gravité, la résistance sera à la gravité comme $\frac{1}{2}Aa$ à la longueur du pendule; ce qui est entièrement conforme à ce qui a été démontré dans la Prop. 28.

Si la résistance est comme la vitesse, la figure $BKTa$ sera à peu près une ellipse. Car si le corps dans un milieu non résistant décrivait dans une oscillation entière la longueur AB , la vitesse dans un lieu quelconque D seroit comme le diamètre AB du cercle décrit, dont DE est l'ordonnée. Donc, comme BA dans un milieu résistant, & Ba dans un milieu non résistant, sont décrites en temps égaux à peu près; & que les vitesses à chacun des points de la longueur Ba sont aux vitesses dans les points correspondans de la lon-

gueur BA , comme Ba à BA ; la vitesse au point D dans un milieu résistant sera comme l'ordonnée du cercle ou de l'ellipse décrits sur le diamètre aB ; donc la figure $BKVTa$ sera une ellipse à peu près. Comme la résistance est supposée proportionnelle à la vitesse, si OV représente la résistance dans le point du milieu O ; l'ellipse $BRV Sa$ décrite du centre O , & avec les diamètres OB , OV sera égale à peu près à la figure $BKVTa$, & au rectangle $Aa \times BO$ qui lui est égal. Donc $Aa \times BO$ est à $OV \times BO$ comme l'aire de cette ellipse est à $OV \times BO$: c'est-à-dire, que Aa est à OV , comme l'aire du demi cercle au carré du rayon, ou comme 11 à 7 environ: & par conséquent $\frac{7}{11}Aa$ seront à la longueur du pendule comme la résistance qu'éprouve en O le corps oscillant est à sa gravité.

Que si la résistance DK est en raison doublée de la vitesse, la figure $BKVTa$ sera presque une parabole dont le sommet sera V & l'axe OV , donc elle sera égale à peu près au rectangle $\frac{2}{3}Ba \times OV$. Mais le rectangle $\frac{1}{2}Ba \times Aa$ est égal au rectangle $\frac{2}{3}Ba \times OV$, donc $OV = \frac{3}{4}Aa$: & par conséquent la résistance qu'éprouve en O le corps oscillant est à sa propre gravité comme $\frac{3}{4}Aa$ à la longueur du pendule.

Je pense que ces conclusions sont assez exactes pour la pratique. Car lorsque l'ellipse ou la parabole $BRV Sa$ coïncide avec la figure $BKVTa$ dans le point du milieu V , si elle la surpasse vers l'un ou l'autre côté BRV ou $V Sa$ elle en est surpassée vers le côté opposé, ce qui les rend égales à peu près.

PROPOSITION XXXI. THÉORÈME XXV.

Si la résistance que le corps qui oscille éprouve à chaque partie proportionnelle des arcs décrits augmente ou diminue dans une raison donnée; la différence entre l'arc décrit dans la descente & l'arc décrit dans l'ascension subséquente augmentera ou diminuera dans la même raison.

Car cette différence vient de la retardation qu'éprouve le pendule par la résistance du milieu, ainsi elle est comme toute la

LIVRE
SECOND.

Fig. 39.

Fig. 39.

Fig. 39.

retardation & comme la résistance retardative qui lui est proportionnelle.

Dans la Proposition précédente le rectangle sous la droite $\frac{1}{2}aB$ & la différence Aa de ces arcs CB , Ca étoit égale à l'aire $BTka$. Cette aire, si la longueur aB reste la même, augmentera ou diminuera dans la raison des ordonnées DK ; c'est-à-dire, en raison de la résistance; elle est donc comme la longueur aB & comme la résistance conjointement. Donc le rectangle sous Aa & $\frac{1}{2}aB$ est comme aB & comme la résistance conjointement, & par conséquent Aa est comme la résistance, *C. Q. F. D.*

Cor. 1. D'où, si la résistance est comme la vitesse, la différence des arcs dans le même milieu fera comme l'arc entier décrit : & réciproquement.

Cor. 2. Si la résistance est en raison doublée de la vitesse, cette différence fera en raison doublée de l'arc entier : & réciproquement.

Cor. 3. Et généralement, si la résistance est en raison triplée, ou dans une autre raison quelconque de la vitesse, la différence fera dans la même raison de l'arc entier : & réciproquement.

Cor. 4. Et si la résistance est en partie en raison simple de la vitesse, & en partie en raison doublée de cette même vitesse, la différence fera en partie dans la raison de l'arc total, & en partie en raison doublée de ce même arc : & réciproquement. Ce sera la même loi & la même raison de résistance par rapport à la vitesse que celle de cette différence par rapport à la longueur de l'arc.

Cor. 5. Donc le pendule décrivant successivement des arcs inégaux, si on peut trouver la proportion de l'incrément & du décrément de cette différence relativement à la longueur de l'arc décrit, on aura la raison de l'incrément & du décrément de la résistance relativement à la vitesse plus ou moins grande.

S C H O L I E G É N É R A L E.

LIVRE
SECOND.

On peut trouver par le moyen de ces Propositions la résistance de toutes sortes de milieux lorsqu'on connoît les oscillations des pendules dans ces milieux. J'ai trouvé, par exemple, la résistance de l'air par les expériences suivantes.

Je suspendis par un fil très-délié à un crochet assez ferme un globe de bois du poids de $57 \frac{7}{12}$ onces romaines, & dont le diamètre étoit de $6 \frac{7}{8}$ pouces anglois, enforte qu'entre le crochet & le centre d'oscillation du globe il y avoit une distance de $10 \frac{1}{2}$ pieds; je marquai sur le fil un point éloigné de 10 pieds & un pouce du centre de suspension; & je plaçai vis-à-vis de ce point une règle partagée en pouces, par le moyen desquels je marquois la longueur des arcs décrits par le pendule. Ensuite je comptai les oscillations dans lesquelles le globe perdoit la huitieme partie de son mouvement. Si le pendule étoit écarté de la verticale à la distance de 2 pouces, & qu'ensuite on le laissât tomber, enforte qu'il décrivît en descendant un arc de deux pouces, & que dans sa premiere oscillation entiere composée de cette descente & de l'ascension subséquente, il parcourut un arc d'environ quatre pouces; ce pendule en 164 oscillations perdoit la huitieme partie de son mouvement, enforte qu'à la dernière chute il décrivait seulement un arc de $1 \frac{1}{4}$ de pouces. S'il parcourait 4 pouces dans sa premiere chute il perdoit la huitieme partie de son mouvement en 121 oscillations, enforte que dans sa dernière ascension il ne décrivait plus qu'un arc de $3 \frac{1}{2}$ pouces. Si dans sa premiere chute il avoit parcouru un arc de 8, 16, 32, ou 64 pouces, il perdoit la huitieme partie de son mouvement en 69, $35 \frac{1}{2}$, $18 \frac{1}{2}$, $9 \frac{2}{3}$ oscillations respectivement. Donc la différence entre les arcs décrits dans la premiere descente & dans la dernière ascension étoit, dans le premier cas, dans le second, dans le troisieme, dans le quatrieme, dans le cinquieme & dans le sixieme, de $\frac{1}{4}$,

$\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 pouces respectivement. En divisant ces différences par le nombre des oscillations faites dans chacun de ces cas, on trouvera que dans une des oscillations moyennes dans lesquelles des arcs de $3\frac{3}{4}$, $7\frac{1}{2}$, 15, 30, 60, 120 pouces ont été décrits, les différences entre l'arc descendu & l'arc subséquent remonté, seront $\frac{1}{246}$, $\frac{1}{242}$, $\frac{1}{29}$, $\frac{4}{71}$, $\frac{8}{57}$, $\frac{24}{29}$ parties de pouces respectivement. Mais ces différences, dans les plus grandes oscillations, sont en raison doublée des arcs décrits à peu près, & dans les plus petites elles sont un peu plus grandes que dans cette raison & par conséquent, (par le Cor 2. de la Prop. 31. de ce Livre) la résistance de ce globe lorsqu'il se meut le plus vite est à peu près en raison doublée de la vitesse; & lorsqu'il se meut le plus lentement elle est un peu plus grande que dans cette raison.

A présent que V représente la plus grande vitesse dans une oscillation quelconque, & que A , B , C soient des quantités données, & que la différence des arcs soit $AV + BV^{\frac{3}{2}} + CV^2$. Puisque les plus grandes vitesses dans une cycloïde sont comme la moitié des arcs décrits en oscillant, & que dans le cercle elles sont comme les cordes de la moitié de ces arcs; elles sont donc plus grandes dans la cycloïde que dans le cercle, lorsque les arcs décrits sont égaux, & cela dans la raison de la moitié de ces arcs à leurs cordes; mais les temps sont plus longs dans le cercle que dans la cycloïde, en raison réciproque de la vitesse; ainsi il est clair que les différences des arcs (qui sont comme la résistance, & le carré du temps conjointement) sont à peu près les mêmes dans l'une & l'autre courbe: car dans la cycloïde ces différences devroient augmenter avec la résistance en raison doublée à peu près de l'arc à la corde, puisque la vitesse est augmentée dans cette raison simple, & elles devroient diminuer, ainsi que le carré des temps, dans cette même raison doublée. Donc pour faire la réduction à la cycloïde, il faut prendre les mêmes différences des arcs que celles qui ont été observées dans

la

le cercle, & supposer les plus grandes vitesses proportionnelles aux arcs entiers, ou à leurs moitiés, c'est-à-dire aux nombres $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8 & 16. Ecrivant donc dans le second, le quatrième & le sixième cas les nombres 1, 4 & 16, au lieu de V , nous aurons $\frac{\frac{1}{2}}{121} = A + B + C$ pour la différence des arcs dans le second cas; $\frac{2}{35\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$ dans le quatrième; & $\frac{8}{9\frac{2}{3}} = 16A + 64B + 256C$ dans le sixième. On tire de ces équations par la réduction & la comparaison qu'exige l'analyse $A = 0$, 0000916, $B = 0$, 0010847, & $C = 0$, 0029558. La différence des arcs est donc comme 0, 0000916 $V + 0$, 0010847 $V^{\frac{3}{2}} + 0$, 0029558 V^2 ; & par conséquent, comme (par le Cor. de la Prop. 30. appliqué à ce cas) la résistance qu'éprouve le globe au milieu de l'arc décrit en oscillant (auquel point la vitesse est V) est à son poids, comme $\frac{7}{11}AV + \frac{7}{10}BV^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}CV^2$ est à la longueur du pendule; si au lieu de A , B & C , on écrit les nombres trouvés, la résistance que le globe éprouvera fera à son poids comme 0, 0000583 $V + 0$, 0007593 $V^{\frac{3}{2}} + 0$, 0022169 V^2 est à la longueur du pendule entre le centre de suspension & la règle, c'est-à-dire, à 121 pouces. D'où, comme V dans le second cas représente 1, dans le quatrième 4, & dans le sixième 16: la résistance fera au poids du globe dans le second cas, comme 0, 0030345 à 121; dans le quatrième comme 0, 041748 à 121 & dans le sixième comme 0, 61705 à 121.

L'arc, que le point marqué sur le fil décrivait étoit dans le sixième cas de $120 - \frac{8}{9\frac{2}{3}}$ ou $119\frac{4}{9}$ pouces. Et par conséquent, comme le rayon étoit de 121 pouces, & la longueur du pendule entre le point de suspension & le centre du globe de 126 pouces, l'arc que le centre du globe décrivait étoit de $124\frac{2}{31}$ pouces. Mais comme la plus grande vitesse du corps oscillant, à cause de la résistance de l'air, ne se trouve pas dans le point le

plus bas de l'arc décrit, mais à peu près dans le milieu de l'arc total : elle sera à peu près la même que si le globe avoit décrit dans sa chute entière dans un milieu non résistant la moitié $62\frac{3}{82}$ pouces de cet arc, & cela, dans une cycloïde à laquelle nous avons réduit ci-dessus le mouvement du pendule : & par conséquent, cette vitesse sera égale à la vitesse que le globe pourroit acquérir en tombant perpendiculairement de la hauteur du sinus versé de cet arc. Mais dans une cycloïde, ce sinus versé est à cet arc de $62\frac{3}{82}$ pouces, comme ce même arc à la double longueur du pendule qui est de 252 pouces, & il est par conséquent de 15, 278 pouces. Donc cette vitesse est celle que le corps peut acquérir en tombant lorsqu'il parcourt dans sa chute un espace de 15, 278 pouces. Avec une telle vitesse le corps éprouve une résistance qui est à son poids comme 0, 61705 à 121, ou (si on fait attention seulement à cette partie de la résistance qui est en raison doublée de la vitesse) comme 0, 56752 à 121.

J'ai trouvé par une expérience d'hydrostatique que le poids d'un globe de bois étoit au poids d'un globe d'eau de même volume comme 55 à 97 : par conséquent 121 est à 213, 4 dans la même raison, ainsi la résistance du globe d'eau, mû avec la vitesse dont on a parlé, sera à son poids comme 0, 56752 à 213, 4, c'est-à-dire, comme 1 à $376\frac{1}{10}$. Ainsi, comme le poids du globe d'eau, dans le temps que le globe décrit une longueur de 30, 556 pouces avec une vitesse uniformément continuée, pourroit produire cette même vitesse dans le globe tombant, il est clair que la force de la résistance continuée uniformément pendant ce temps peut ôter une vitesse qui sera moindre dans la raison de 1 à $376\frac{1}{10}$, c'est-à-dire, qui sera la $\frac{1}{376\frac{1}{10}}$ partie de la vitesse totale. Et par conséquent, ce globe, dans le temps dans lequel il pourroit parcourir par une vitesse uniformément continuée la longueur de son demi diamètre, ou $3\frac{7}{16}$ pouces perdroit la $\frac{1}{3342}$ partie de son mouvement.

Je comptai aussi les oscillations dans lesquelles le pendule perdoit la quatrième partie de son mouvement. Dans la table suivante, les chiffres d'en-haut marquent la longueur de l'arc décrit dans la première chute, exprimée en pouces & en parties de pouces : les chiffres du milieu marquent la longueur de l'arc décrit dans la dernière ascension ; & le nombre des oscillations est marqué par les chiffres d'en-bas. J'ai décrit cette expérience comme la plus exacte qui ait été faite, puisqu'il y est marqué comment le pendule perdoit la huitième partie de son mouvement. J'en laisse le calcul à faire à ceux qui voudront le tenter.

<i>Première chute.</i>	2	4	8	16	32	64
<i>Dernière ascension.</i>	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
<i>Nombre des oscillations.</i>	374	272	$162\frac{1}{2}$	$83\frac{1}{2}$	$41\frac{2}{3}$	$22\frac{2}{3}$

Ensuite, je suspendis au même fil un globe de plomb de deux pouces de diamètre, & du poids de $26\frac{1}{4}$ onces romaines, en sorte qu'entre le centre du globe & le point de suspension il y avoit un intervalle de $10\frac{1}{2}$ pieds, & je comptai les oscillations dans lesquelles il perdit une partie donnée de son mouvement. Dans les tables suivantes, la première marque le nombre des oscillations dans lesquelles il perdit la huitième partie de son mouvement total, & la seconde le nombre des oscillations dans lesquelles il en perdit la quatrième partie.

P R E M I E R E T A B L E.

<i>Première chute.</i>	1	2	4	8	16	32	64
<i>Dernière ascension.</i>	$\frac{7}{8}$	$\frac{7}{4}$	$3\frac{1}{2}$	7	14	28	56
<i>Nombre des oscillations.</i>	226	228	193	140	$90\frac{1}{2}$	53	30

S E C O N D E T A B L E.

<i>Première chute.</i>	1	2	4	8	16	32	64
<i>Dernière ascension.</i>	$\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{2}$	3	6	12	24	48
<i>Nombre des oscillations.</i>	510	518	420	318	204	121	70

En prenant dans la première table, la troisième, la cinquième & la septième observation, & représentant les plus grandes vitesses dans ces observations en particulier, par les nombres 1, 4, 16, respectivement, & en général par la quantité V comme ci-dessus : on aura, dans la troisième observation $\frac{V}{193} = A + B + C$, dans la cinquième $\frac{2V}{90\frac{1}{2}} = 4A + 8B + 16C$, dans la septième $\frac{8V}{30} = 16A + 64B + 256C$. Et ces équations réduites donnent $A = 0,001414$; $B = 0,000297$; $C = 0,000879$, d'où l'on tire que la résistance du globe mu avec la vitesse V est dans la même raison à son poids, qui étoit de $26\frac{1}{4}$ onces; que, $0,0009 V + 0,000208 V^{\frac{3}{2}} + 0,000659 V^2$ à la longueur du pendule qui est de 121 pouces. Et si l'on considère seulement cette partie de la résistance qui est en raison doublée de la vitesse, elle sera au poids du globe comme $0,000659 V^2$ est à 121 pouces. Mais cette partie de la résistance étoit dans la première expérience au poids du globe de bois qui étoit de $57\frac{7}{12}$ onces; comme $0,002217 V^2$ à 121 : & delà on tire la résistance du globe de bois à la résistance du globe de plomb (leurs vitesses étant les mêmes) comme $57\frac{7}{12} \times 0,002217$ à $26\frac{1}{4} \times 0,000659$, c'est-à-dire, comme $7\frac{1}{2}$ à 1. Les diamètres de ces deux globes étoient $6\frac{7}{8}$ & 2 pouces, dont les quarrés sont l'un à l'autre comme $47\frac{1}{4}$ & 4, ou $11\frac{1}{16}$ & 1 à peu près. Donc, les résistances des globes qui ont la même vitesse, seront dans une moindre raison que la raison doublée des diamètres. Mais nous n'avons pas encore considéré la résistance du fil, qui certainement étoit assez considérable, & qui doit être soustraite de la résistance trouvée des pendules. Je n'ai pu la déterminer exactement, mais cependant je l'ai trouvée plus grande que la troisième partie de la résistance du plus petit pendule entier; & par-là j'ai connu que les résistances des globes, ôtant la résistance du fil, sont à peu près en raison doublée des diamé-

tres. Car la raison de $7\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$ à $1 - \frac{1}{3}$ ou de $10\frac{1}{2}$ à 1 ne s'éloigne pas beaucoup de la raison doublée des diamètres qui est celle de $11\frac{1}{2}$ à 1.

Comme la résistance du fil est moins remarquable dans les plus grands globes, j'ai essayé aussi cette expérience avec un globe dont le diamètre étoit de $18\frac{3}{4}$ pouces. La longueur du pendule entre le point de suspension & le centre d'oscillation étoit de $122\frac{1}{2}$ pouces, & entre le point de suspension & le nœud fait dans le fil de $109\frac{1}{2}$ pouces. L'arc décrit par le nœud du pendule dans sa première chute étoit de 32 pouces, & celui de sa dernière ascension décrit par le même nœud, étoit après cinq oscillations, de 28 pouces. La somme de ces arcs, ou l'arc total décrit dans une oscillation moyenne étoit de 60 pouces. La différence de ces arcs étant de 4 pouces, la dixième partie, ou la différence entre l'ascension & la descension étoit de $\frac{2}{5}$ de pouce dans une oscillation moyenne. Comme le rayon $109\frac{1}{2}$ est au rayon $122\frac{1}{2}$ ainsi l'arc total de 60 pouces décrit dans une oscillation moyenne par le nœud, est à l'arc total de $67\frac{1}{8}$ pouces décrit par le centre du globe dans une oscillation moyenne; & comme la différence $\frac{2}{5}$ est à la nouvelle différence 0, 4475. Si on augmentoit la longueur du pendule dans la raison de 126 à $122\frac{1}{2}$, la longueur de l'arc décrit restant la même, le temps d'oscillation augmenteroit & la vitesse du pendule diminueroit dans cette raison sousdoublée, mais la différence 0, 4475 des arcs décrits dans l'ascension & la descension subséquente resteroit la même. Ensuite, si l'arc décrit augmentoit en raison de $124\frac{3}{4}$ à $67\frac{1}{8}$ cette différence 0, 4475 augmenteroit dans cette raison doublée, & par conséquent elle deviendrait 1, 295. Tout ceci auroit lieu, en supposant la résistance du pendule en raison doublée de la vitesse. Donc, si le pendule décrivait un arc total de $124\frac{3}{4}$ pouces, & que sa longueur entre le point de suspension & le centre d'oscillation fut de 126 pouces, la différence des arcs décrits dans la descension, & l'ascension subséquente seroit de 1, 5295 pouces. Et cette dif-

férence multipliée par le poids du globe qui forme le pendule lequel étoit de 208 onces, donne 318, 136. De plus, lorsque le centre d'oscillation du pendule de bois, dont on a parlé ci-dessus, étoit distant de 126 pouces du point de suspension, il décrivait un arc total de $124\frac{2}{3}$ pouces, & la différence des arcs décrits dans la descente & l'ascension subséquente étoit $\frac{126}{121} \times \frac{8}{9\frac{2}{3}}$, qui étant multipliée par le poids du globe qui étoit de $57\frac{7}{12}$ donnoit 49, 396. J'ai multiplié ces différences par les poids des globes afin de trouver leurs résistances. Car ces différences viennent des résistances, ainsi, elles sont comme les résistances directement & comme les poids inversement. Ces résistances sont donc comme les nombres 318, 136 & 49, 396. Mais la partie de la résistance du plus petit globe laquelle est en raison doublée de la vitesse, étoit à la résistance totale, comme 0, 56752 à 0, 61675, c'est-à-dire, comme 45, 453, à 49, 396; & la partie de la résistance du plus grand globe est presque égale à toute sa résistance; donc ces parties sont comme 318, 136 & 45, 453 à peu près, c'est-à-dire, comme 7 à 1. Or les diamètres des globes sont $18\frac{1}{4}$ & $6\frac{7}{8}$ dont les carrés $351\frac{9}{16}$ & $47\frac{17}{64}$ sont comme 7, 438 & 1, c'est-à-dire, à peu près, comme les résistances 7 & 1 des globes. La différence des raisons est plus grande que celle qui peut venir de la résistance du fil. Donc les parties de ces résistances qui sont, dans des globes égaux, comme les carrés des vitesses; sont aussi, les vitesses étant égales, comme les carrés des diamètres des globes.

Au reste, le plus grand des globes dont je me suis servi dans ces expériences n'étoit pas parfaitement sphérique, & par cette raison, dans le calcul que je viens de rapporter, j'ai négligé, afin d'être plus court, quelques fractions trop petites; ne m'embarassant pas beaucoup de faire un calcul rigoureux, dans une expérience dont l'exactitude n'étoit pas poussée assez loin. Je souhaiterois cependant, à cause que la démonstration du vuide dé-

pend de ces expériences, qu'on les fit plus exactement, sur une plus grande quantité, & avec de plus grands globes. Si on prend des globes en proportion géométrique, c'est-à-dire, dont les diamètres soient de 4, 8, 16, 32 pouces; on pourra connoître par la progression des expériences ce qui doit arriver dans de plus grands globes.

Pour comparer les résistances des différens fluides entr'eux, j'ai tenté les expériences suivantes. J'ai fait un petit vaisseau de bois, long de quatre pieds, haut & large d'un pied, j'ai rempli ce vaisseau d'eau de fontaine, & j'ai fait osciller le pendule lorsqu'il étoit plongé dans ce vaisseau, qui étoit ouvert. Un globe de plomb du poids de $166\frac{1}{2}$ onces, & de $3\frac{1}{8}$ de diamètre, oscilloit comme il est marqué dans la table suivante, la longueur du pendule depuis le point de suspension jusqu'à un point marqué sur le fil étant de 126 pouces, & de $134\frac{3}{8}$ pouces jusqu'au centre d'oscillation.

Mesure en pouces de l'arc décrit dans la première chute par le point marqué sur le fil. } 64 32 16 8 4 2 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

Mesure en pouces de l'arc décrit dans la dernière ascension. } 48 24 12 6 3 $1\frac{1}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{3}{16}$

Différence en pouces des arcs laquelle est proportionnelle au mouvement perdu. } 16 8 4 2 1 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{16}$

Nombre des oscillations dans l'eau. } $\frac{29}{60}$ $1\frac{1}{3}$ 3 7 $11\frac{1}{4}$ $12\frac{2}{3}$ $13\frac{1}{3}$

Nombre des oscillations dans l'air. } $85\frac{1}{2}$ 287 535

Dans l'expérience de la quatrième colonne, les quantités de mouvement perdues dans 35 oscillations dans l'air étoient égales à celles qui furent perdues dans $1\frac{1}{3}$ dans l'eau, les oscillations étoient donc un peu plus promptes dans l'air que dans l'eau. Mais si on accéléroit les oscillations dans l'eau dans une raison, telle que le mouve-

ment des pendules fut égal en vitesse dans l'un & l'autre milieu ; le nombre des oscillations dans lesquelles il perdrait son mouvement dans l'eau demeureroit comme auparavant de $1 \text{ \& } \frac{1}{7}$, à cause que la résistance augmente , & que le carré du temps diminue dans la même raison doublée. Les pendules qui ont des vitesses égales perdent donc des quantités égales de mouvement en 535 oscillations dans l'air, & en $1 \frac{1}{7}$ dans l'eau ; donc la résistance du pendule dans l'eau est à sa résistance dans l'air comme 535 à $1 \frac{1}{7}$. C'est là la proportion des résistances totales dans le cas de la quatrième colonne.

Que $AV + CV^2$ représente à présent la différence des arcs décrits dans la descente & l'ascension subséquente par un globe mu dans l'air avec la plus grande vitesse V ; comme la plus grande vitesse dans le cas de la quatrième colonne est à la plus grande vitesse dans le cas de la première comme 1 à 8 ; & que cette différence des arcs dans le cas de la quatrième colonne est à la différence dans le cas de la première comme $\frac{2}{535}$ à $\frac{16}{85 \frac{1}{2}}$ ou comme $85 \frac{1}{2}$ à 4280 : écrivant dans ces cas 1 & 8 pour les vitesses , $85 \frac{1}{2}$, & 4280 pour les différences des arcs , on aura $A + C = 85 \frac{1}{2}$ & $8A + 64C = 4280$, ou $A + 8C = 535$; donc par la réduction des équations on aura $7C = 449 \frac{1}{2}$, & $C = 64 \frac{1}{14}$, & $A = 11 \frac{2}{7}$: & par conséquent, la résistance étant comme $\frac{7}{11} AV + \frac{1}{4} CV^2$, elle deviendra comme $13 \frac{6}{11} V + 48 \frac{2}{7} V^2$. C'est pourquoi dans le cas de la quatrième colonne où la vitesse étoit 1, la résistance totale est à sa partie proportionnelle au carré de la vitesse, comme $13 \frac{6}{11} + 48 \frac{2}{7}$ ou $61 \frac{13}{17}$ à $48 \frac{2}{7}$; & par conséquent la résistance du pendule dans l'eau, est à cette partie de la résistance dans l'air, laquelle est proportionnelle au carré de la vitesse (& cette résistance est seule à considérer dans les mouvemens les plus prompts) comme $61 \frac{13}{17}$ à $48 \frac{2}{7}$ & 535 à $1 \frac{1}{7}$ conjointement, c'est-à-dire, comme 571 à 1. Si tout le fil du pendule oscillant étoit plongé dans l'eau, sa résistance seroit encore plus

plus grande ; enforte que la résistance du pendule qui oscille dans l'eau , laquelle est proportionnelle au quarré de la vitesse , & qui doit être seule considérée dans les corps mûs le plus vite , est à la résistance de ce même pendule entier lorsqu'il oscille dans l'air avec la même vitesse , comme 850 à 1 environ , c'est-à-dire , comme la densité de l'eau à la densité de l'air à peu près.

Il falloit prendre dans ce calcul cette partie de la résistance du pendule dans l'eau , qui étoit comme le quarré de la vitesse , mais (ce qui paroîtra peut-être extraordinaire) la résistance dans l'eau augmentoit dans une raison plus que doublée de la vitesse. Et en cherchant la raison , j'ai trouvé que le vaisseau dans lequel je faisois osciller ce pendule étoit trop étroit pour la grandeur du globe du pendule , & qu'il s'opposoit un peu à cause de sa petitesse au mouvement que l'eau faisoit pour céder , car lorsque le globe suspendu , dont le diamètre étoit d'un ponce , étoit plongé ; la résistance augmentoit à peu près en raison doublée de la vitesse. Je l'ai éprouvé en formant un pendule de deux globes , dont l'inférieur qui étoit le plus petit oscilloit dans l'eau , pendant que le supérieur , qui étoit le plus grand , & qui étoit attaché au même fil , fort près de la surface de l'eau , oscilloit dans l'air , & aidait au mouvement oscillatoire qu'il faisoit durer plus longtemps ; le succès de ces expériences est marqué dans la table suivante.

<i>Arc décrit dans la premiere chute.</i>	$\frac{1}{2}$	16	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
<i>Arc décrit dans la dernière ascension.</i>	$\frac{1}{2}$	12	6	3	$1\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$
<i>Différence des arcs proportionnels au mouvement perdu.</i>	$\frac{1}{2}$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$
<i>Nombre des oscillations.</i>	$\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{8}$	$6\frac{1}{2}$	$12\frac{1}{2}$	$21\frac{1}{2}$	34	53	$62\frac{1}{2}$

Pour comparer entr'elles les résistances des milieux , j'ai fait osciller des pendules de fer dans du mercure. La longueur du fil de fer étoit presque de trois pieds , & le diamètre du globe du

pendule étoit d'un tiers de pouce environ. J'avois attaché au même fil de fer, fort près de la surface du mercure, un autre globe de plomb assez grand pour faire durer le mouvement du pendule plus long-temps. Et j'avois rempli alternativement d'eau commune, & de mercure le petit vase qui tenoit environ trois livres de mercure, afin de faire osciller alternativement le pendule dans l'un & l'autre fluide, & de pouvoir trouver, par ce moyen, la proportion des résistances; je trouvai que la résistance du vif-argent étoit à celle de l'eau comme 13 ou 14 à 1 environ : c'est-à-dire, comme la densité du vif-argent à celle de l'eau. Lorsque je suspendois un globe un peu plus grand, lorsque je me servois, par exemple, d'un globe dont le diamètre étoit de $\frac{1}{3}$ ou de $\frac{2}{3}$ de pouces, la résistance du vif-argent étoit à celle de l'eau comme 12 ou 10 à 1 environ. Mais je me fie davantage à la première expérience, à cause que dans ces dernières le vase étoit un peu petit pour la grosseur du globe qui y étoit plongé, & qu'en augmentant le globe il auroit aussi fallu augmenter le vase. J'aurois fait aussi des expériences semblables dans de plus grands vases, & dans d'autres liqueurs tant froides que chaudes, & sur des métaux fondus, s'il ne m'avoit pas paru suffisamment certain, par les expériences que je viens de décrire, que la résistance que des corps mus très-vîte éprouvent est à peu près proportionnelle à la densité des fluides dans lesquels ils se meuvent. Je dis à peu près & non exactement, parce qu'il n'est pas douteux que les fluides qui ont plus de ténacité résistent plus, à densité pareille, que ceux qui sont plus fluides; ainsi l'huile froide résiste plus que la chaude, l'huile chaude plus que l'eau de pluie, & l'eau plus que l'esprit de vin. Mais dans les liquides fluides, comme l'air, l'eau ou douce ou salée, l'esprit de vin, l'esprit de térébentine, l'esprit de sel, l'huile chaude & dégagée de sa partie grossière par la distillation, l'huile de vitriol, le mercure, les métaux fondus, & enfin dans toutes les espèces de liquides, s'il y en a qui soient assez fluides pour conserver plus long-temps que le vase dans lequel ils

font le mouvement qu'on leur a imprimé , & qui étant versés se séparent facilement en gouttes , je ne doute point que les résistances n'observent la règle que je viens de rapporter : sur-tout si on fait les expériences sur de plus grands globes suspendus , & qui soient mus plus vite.

Enfin , comme plusieurs croient qu'il y a une certaine matière éthérée très-subtile qui traverse librement les pores des corps & tous leurs interstices ; & que cette matière qui flue dans les pores des corps doit causer une résistance : pour connoître si la résistance que les corps qui se meuvent éprouvent s'exerce toute entière sur leur superficie externe , ou si les superficies de leurs parties internes éprouvent une résistance sensible , j'imaginai l'expérience suivante. Je suspendis à un fil long de 11 pieds & attaché à un crochet d'acier très-ferme par le moyen d'un anneau aussi d'acier , une petite boîte de sapin ronde , en sorte que cela composoit un pendule de 11 pieds. Le crochet qui étoit très-pointu par en haut étoit concave & tranchant , afin que l'anneau qui tenoit à ce crochet par sa partie supérieure put se mouvoir très-librement ; & c'étoit à la partie inférieure de cet anneau que le fil étoit attaché. Ce pendule étant ainsi composé je l'élevai à la hauteur de 6 pieds environ , dans un plan perpendiculaire à la partie interne du crochet , de peur que lorsque le pendule oscilleroit l'anneau ne vacillât le long du crochet. Car le point de suspension dans lequel l'anneau touche le crochet doit demeurer immobile. Je marquois exactement la hauteur à laquelle j'élevois le pendule , ensuite le laissant tomber , je marquois trois autres hauteurs auxquelles il revenoit à la fin de la première , de la seconde & de la troisième oscillation. Je répétai souvent cette expérience afin d'être sûr que ces hauteurs fussent exactement marquées. Cela fait , je remplis la boîte de plomb & des métaux les plus pesans ; mais je pesai auparavant la boîte vuide avec la partie du fil qui l'entouroit , & la moitié du fil qui étoit tendu entre le crochet & la boîte. Car ce fil par sa tension agit toujours sur le

pendule, pour le tirer hors de sa position perpendiculaire, avec la moitié de son poids. J'ajoutai à ce poids celui de l'air contenu dans la boîte, & tous ces poids ensemble faisoient à peu près la 78^e partie de celui de la boîte lorsqu'elle étoit pleine de métal. Or comme la boîte, lorsqu'elle étoit pleine de métal, augmentoit la longueur du pendule en tendant le fil par son poids, j'acourcis ce fil afin que la longueur du pendule fut la même qu'auparavant. Ensuite, élevant le pendule au même lieu d'où je l'avois premièrement fait tomber, je comptai 77 oscillations environ, jusqu'à ce que la boîte fut revenue à la seconde hauteur que j'avois marquée, & ensuite 77 autres jusqu'à ce qu'elle fut revenue à la troisième hauteur, & encore 77 jusqu'à ce qu'elle fut revenue à la quatrième : d'où je conclus, que la résistance entière de la boîte pleine n'étoit pas à la résistance de la boîte vuide dans une plus grande raison que de 78 à 77. Car si les résistances avoient été égales dans l'un & l'autre cas, la boîte pleine, ayant 78 fois plus de force d'inertie que la boîte vuide, auroit dû conserver son mouvement 78 fois plus long-temps, & par conséquent, le pendule auroit dû faire toujours dans ce cas 78 oscillations avant de retourner aux hauteurs marquées ; mais il n'en fit que 77.

Donc, si A représente la résistance de la superficie externe de la boîte, & B la résistance des parties internes de la boîte vuide ; & que les résistances des parties internes des corps qui ont la même vitesse, soient comme la matière ou le nombre des particules qui éprouvent la résistance : la résistance des parties internes de la boîte pleine sera 78 B : donc la résistance totale de la boîte vuide $A + B$ fera à la résistance totale de la boîte pleine $A + 78 B$, comme 77 à 78 ; d'où l'on tire $A + B : 77 B :: 77 : 1$, donc, $A + B : B :: 77 \times 77 : 1$, ce qui donne $A : B :: 5928 : 1$. Donc la résistance des parties internes de la boîte vuide est 5000 fois moindre que la résistance de sa superficie externe, & davantage. C'est ainsi que nous avons examiné l'hypothèse dans laquelle on prétend que la plus grande résistance de la boîte pleine ne vient

d'aucune cause inconnue, mais seulement de l'action de quelque fluide très-subtil renfermé entre les parties du métal.

J'ai rapporté de mémoire cette expérience, car le papier sur lequel j'en avois écrit le détail a été perdu. Ainsi j'ai été forcé d'obmettre les fractions dont je ne me souvenois plus, n'ayant pas le loisir de la répéter. Comme je m'étois servi d'abord d'un crochet qui étoit trop foible, le retardement de la boîte pleine arrivoit plutôt. Et en cherchant la raison, je trouvai que c'étoit parce que le crochet trop foible cédoit au poids de la boîte, & qu'obéissant à ses oscillations, il se plioit de côté & d'autre. Je pris donc un crochet plus fort, enforte que le point de suspension demeurât immobile, & alors tout se passa comme je l'ai décrit ci-dessus.

SEPTIÈME SECTION.

Des mouvemens des fluides & de la résistance des projectiles.

PROPOSITION XXXII. THÉORÈME XXVI.

Si deux systèmes semblables de corps sont composés d'un nombre égal de particules, & que les particules correspondantes soient respectivement semblables & proportionnelles dans l'un & l'autre système, qu'elles soient posées de même entr'elles, qu'elles ayent entr'elles une raison donnée de densité, & qu'elles commencent à se mouvoir entr'elles semblablement dans des temps proportionnels, c'est-à-dire, celles qui sont dans un même système entr'elles, & si les particules d'un même système ne se touchent point, excepté dans les momens où elles se réfléchissent, enfin si elles ne s'attirent ni ne se fuient mutuellement que par des forces accélératrices qui soient inversement comme les diamètres des particules correspondantes, & directement comme les quarrés des vitesses : je dis, que les particules de ces systèmes continueront à se mouvoir entr'elles de la même manière dans des temps proportionnels.

Je dis que les corps semblables, & posés de même, se meu-

vent entr'eux de la même manière dans des temps proportionnels lorsque leur position entr'eux est toujours la même à la fin de ces temps : comme lorsqu'on compare, par exemple, les particules d'un système avec les particules correspondantes de l'autre. Il suit de là, que les temps dans lesquels les parties semblables & proportionnelles des figures semblables seront décrites par des particules correspondantes seront des temps proportionnels. Donc si on a deux systèmes de cette sorte, les particules correspondantes ayant commencé à se mouvoir de la même manière continueront de même jusqu'à ce qu'elles se rencontrent. Car si aucune force n'agissoit sur elles, elles avanceroient uniformément en ligne droite par la première loi du mouvement. Mais si elles agissoient l'une sur l'autre mutuellement par quelques forces, & que ces forces fussent inversement comme les diamètres des particules correspondantes, & directement comme les quarrés des vitesses ; les positions des particules étant semblables, & les forces étant proportionnelles, les forces totales qui agiroient alors sur les particules correspondantes, étant composées des forces qui agissent sur chacune des particules (par le second corollaire des loix) auroient des déterminations semblables à celles qu'elles auroient si elles tendoient à des centres placés semblablement entre ces particules ; & les forces totales seroient entr'elles comme chacune des forces composantes, c'est-à-dire, inversement comme les diamètres des particules correspondantes, & directement comme les quarrés des vitesses : & elles feroient par conséquent que les particules correspondantes continueroient à décrire des figures semblables.

Tout cela arrivera ainsi (par les corol. 1. & 8. de la Prop. 4. L. 1.) pourvu que les centres soient en repos. Mais s'ils se meuvent, comme leurs situations demeurent les mêmes entre les particules des systèmes, à cause qu'ils sont mus d'une manière semblable ; il arrivera des changemens semblables dans les figures que ces particules décrivent. Donc les mouvemens des particules semblables correspondantes seront semblables jusqu'à leurs premières rencontres, &

par conséquent les rencontres & les réflexions seront semblables , & ensuite (par ce qui a déjà été démontré) elles auront les mêmes mouvemens entr'elles , jusqu'à ce qu'elles se rencontrent de nouveau ; & ainsi de suite à l'infini. C. Q. F. D.

Cor. 1. Delà , si deux corps quelconques , semblables & situés de même par rapport aux particules correspondantes des systèmes , commencent à se mouvoir de même entre ces particules dans des temps proportionnels , & que leurs grandeurs & leurs densités entr'elles soient comme les grandeurs & les densités des particules correspondantes : elles continueront à se mouvoir de même dans des temps proportionnels. C'est la même chose pour les plus grandes parties de l'un & l'autre système que pour les particules.

Cor. 2. Et si toutes les parties semblables & posées de même des systèmes sont en repos entr'elles : & que deux d'entr'elles , plus grandes que les autres , & qui se correspondent mutuellement dans l'un & l'autre système , commencent à se mouvoir d'une façon quelconque d'un mouvement semblable , & selon des lignes posées de même : elles produiront des mouvemens semblables dans les autres parties des systèmes , & elles continueront à se mouvoir de même entr'elles dans des temps proportionnels ; & par conséquent à décrire des espaces proportionnels à leurs diamètres.

PROPOSITION XXXIII. THÉORÈME XXVII.

Les mêmes choses étant posées , je dis que les parties les plus grandes des systèmes éprouvent une résistance en raison composée , de la raison doublée de leurs vitesses , de la raison doublée de leurs diamètres , & de la raison de la densité des parties du système.

Car la résistance vient en partie des forces centripètes ou centrifuges par lesquelles les particules des systèmes agissent les unes sur les autres , & en partie des rencontres & des réflexions des particules , & des parties les plus grandes. Les résistances du premier genre sont entr'elles comme les forces motrices entières qui

les produisent, c'est-à-dire, comme les forces accélératrices entières, & les quantités de matiere dans les parties correspondantes; ou, ce qui revient au même par l'hypothèse, comme les quarrés des vitesses directement, & les distances des particules correspondantes inversement, & comme les quantités de matiere dans les particules correspondantes directement: c'est pourquoi, les distances des particules d'un système étant aux distances correspondantes des particules de l'autre système, comme le diamètre d'une particule, ou d'une partie dans le premier système au diamètre d'une particule ou d'une partie dans l'autre système, & que les quantités de matiere sont comme les densités des parties, & les cubes des diamètres, les résistances sont l'une à l'autre comme les quarrés des vitesses, les quarrés des diamètres, & les densités des particules des systèmes. *C. Q. F. D.*

Les résistances du second genre sont comme les nombres des réflexions correspondantes, & les forces conjointement. Mais les nombres des réflexions sont entr'eux comme les vitesses des parties correspondantes directement, & inversement comme les espaces entre ces réflexions. Les forces des réflexions sont comme les vitesses, les grandeurs, & les densités des parties correspondantes conjointement, c'est-à-dire, comme les vitesses, les cubes des diamètres & les densités des parties. Et en composant toutes ces raisons, les résistances des parties correspondantes sont entr'elles conjointement comme les quarrés des vitesses, les quarrés des diamètres & les densités des parties. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc, si ces systèmes sont deux fluides élastiques comme l'air, & que leurs parties soient en repos entr'elles: que deux corps semblables & proportionnels aux parties des fluides, quant à la grandeur & à la densité, & posés de même entre ces parties, soient jettés d'une façon quelconque, suivant des lignes posées de même; & que les forces accélératrices, par lesquelles les particules de ces fluides agissent mutuellement les unes sur les autres, soient inversement comme les diamètres des corps jettés, & directement

directement comme les quarrés des vîteses : ces corps produiront, dans les fluides, des mouvemens semblables, & ils y décriront, dans des temps proportionnels, des espaces proportionnels à leurs diamètres.

Cor. 2. Ainsi un corps qui se meut avec une grande vîtesse dans le même fluide éprouve une résistance en raison doublée de sa vîtesse à peu près. Car si les forces, par lesquelles les particules éloignées agissent mutuellement les unes sur les autres, étoient augmentées en raison doublée de la vîtesse, la résistance seroit dans la même raison doublée exactement; donc dans un milieu dont les parties éloignées n'agissent aucunement les unes sur les autres, la résistance est exactement en raison doublée de la vîtesse.

Soient *A, B, C* trois milieux composés de parties semblables, égales & disposées régulièrement à des distances égales; que les parties des milieux *A* & *B* se fuient mutuellement avec des forces qui soient entr'elles comme *T* & *V*, & que celles du milieu *C* soient destituées entièrement de ces sortes de forces. Si quatre corps égaux *D, E, F, G* se meuvent dans ces milieux, les deux premiers *D* & *E* dans les deux premiers *A* & *B*, & les deux autres *F* & *G* dans le troisième *C*; & que la vîtesse du corps *D* soit à la vîtesse du corps *E*, & la vîtesse du corps *F* à la vîtesse du corps *G* en raison soudoublée des forces *T* aux forces *V*: la résistance du corps *D* sera à la résistance du corps *E*, & la résistance du corps *F* à la résistance du corps *G* en raison doublée des vîteses; & par conséquent, la résistance du corps *D* sera à la résistance du corps *F* comme la résistance du corps *E* à la résistance du corps *G*. Supposez que ces corps *D* & *F* aient des vîteses égales ainsi que les corps *E* & *G*; en augmentant les vîteses des corps *D* & *F* dans une raison quelconque, & diminuant les forces des particules du milieu *B* dans la même raison doublée, le milieu *B* approchera tant qu'on voudra de la forme & de la condition du milieu *C*, & par conséquent, les résistances

des corps égaux E & G , qui ont des vitesses égales dans ces milieux, approcheront sans cesse de l'égalité, enforte que leur différence deviendra enfin plus petite que toute différence donnée. Donc, comme les résistances des corps D & F sont entr'elles comme les résistances des corps E & G , elles approcheront aussi sans cesse de même de l'égalité. Donc les résistances des corps D & F sont à peu près égales lorsqu'ils se meuvent très-vîte : & par conséquent, comme la résistance du corps F est en raison doublée de sa vitesse, la résistance du corps D sera dans la même raison à peu près.

Cor. 3. La résistance d'un corps, qui se meut très-vîte dans un milieu quelconque élastique, est la même à peu près que si les parties du fluide n'avoient aucune force centrifuge, & qu'elles ne se fuyassent pas mutuellement : pourvu que la force élastique du fluide soit l'effet des forces centrifuges des particules, & que la vitesse soit si grande que les forces n'aient pas assez de temps pour agir.

Cor. 4. Donc, comme les résistances des corps semblables qui ont des vitesses égales, & dont les parties qui ne sont pas contigues ne se fuyent pas mutuellement, sont comme les quarrés des diamètres ; les résistances des corps qui ont des vitesses égales & qui se meuvent très-vîte sont aussi, dans un fluide élastique, comme les quarrés des diamètres à peu près.

Cor. 5. Comme les corps semblables, égaux, & qui ont des vitesses égales dérangent, dans des milieux qui ont la même densité, des quantités égales de matiere en temps égaux, & leur impriment une égale quantité de mouvement lorsque les particules de ces milieux ne se fuient point mutuellement, soit que ces particules soient très-petites & en grand nombre, soit qu'elles soient plus grandes & que leur nombre soit moindre, & que réciproquement (par la troisieme loi du mouvement) ces corps éprouvent une réaction égale de cette même matiere, c'est-à-dire, que cette matiere leur résiste également : il est clair aussi, que dans les

fluides élastiques de la même densité, les résistances que les corps éprouvent sont égales, à peu près, lorsqu'ils se meuvent très-vîte; soit que ces fluides soient composés de particules très-grossières, ou qu'ils le soient des plus subtiles de toutes. Car la subtilité du milieu ne diminue pas beaucoup la résistance des projectiles qui se meuvent très-vîte.

Cor. 6. Tout cela se passe ainsi dans les fluides dont la force élastique est l'effet des forces centrifuges des parties. Mais si cette force vient d'une autre cause, comme de l'extension des parties telle que celle qu'on remarque dans la laine ou dans les branches des arbres, ou de quelqu'autre cause quelconque, qui rende le mouvement des parties entr'elles moins libre: alors la fluidité du milieu étant moindre, la résistance sera plus grande que dans les précédens corollaires.

PROPOSITION XXXIV. THÉORÈME XXVIII.

Si un globe & un cylindre de diamètres égaux se meuvent avec une vitesse égale, dans le sens de l'axe du cylindre, dans un milieu rare & composé de parties égales, & situées librement à des distances égales les unes des autres, la résistance du globe sera sousdouble de celle du cylindre.

Car l'action du milieu sur le corps étant la même (par le Cor. 5. des loix) soit qu'il se meuve dans un milieu en repos, soit que les particules de ce milieu viennent choquer ce corps supposé en repos avec la même vitesse: commençons par considérer ici le corps comme étant en repos, & voyons avec quelle force ce milieu, qui est supposé se mouvoir, agira sur lui.

Que *C* représente donc le centre d'un corps sphérique *ABKI* *Fig. 496* dont le demi diamètre est *CA*, que les particules du milieu frappent ce corps sphérique avec une vitesse donnée selon des lignes parallèles à *AC*: & que *FB* soit une de ces droites. Soit prise sur cette ligne la ligne *LB* égale au demi diamètre *CB*, & soit

menée BD qui touche la sphere en B . Sur KC & BD soient abaissées les perpendiculaires BE , LD , la force avec laquelle une particule de ce milieu frappe le globe en B , en tombant obliquement selon la droite FB , sera à la force avec laquelle la même particule frapperait perpendiculairement en b le cylindre $ONGQ$ décrit autour du globe & ayant pour axe ACI , comme LD est à LB , ou BE à BC . De plus, l'efficacité de cette force pour mouvoir le globe suivant son incidence FB ou AC , est à son efficacité pour mouvoir ce globe du côté vers lequel elle est déterminée, c'est-à-dire, du côté de la droite BC selon laquelle elle presse le corps directement, comme BE est à BC . Et en composant ces raisons, l'efficacité d'une particule sur le globe, lorsqu'elle y tombe obliquement selon la droite FB , pour le mouvoir du côté de son incidence, est à l'efficacité de cette même particule lorsqu'elle tombe perpendiculairement sur le cylindre selon la même droite, pour le mouvoir du même côté, comme BE^2 est à BC^2 . C'est pourquoi, si sur bE qui est perpendiculaire à la base circulaire NAO du cylindre, & égale au rayon AC , on prend $bH = \frac{BE^2}{BC}$, bH sera à bE comme l'effet de la particule sur le globe est à son effet sur le cylindre. Et par conséquent, le solide formé par toutes les droites bH , sera au solide formé par toutes les droites bE , comme l'effet de toutes les particules sur le globe est à l'effet de toutes les particules sur le cylindre. Mais le premier de ces solides est un paraboloïde dont le sommet est C , l'axe CA , & le paramètre CA ; & le dernier est le cylindre circonscript à ce paraboloïde. De plus, il est connu que le paraboloïde est la moitié du cylindre circonscript; donc la force totale du milieu sur le globe est la moitié de la force totale de ce même milieu sur le cylindre. Et par conséquent, si les particules qui composent le milieu étoient en repos, & que le globe & le cylindre se fussent avec la même vitesse, la résistance que le globe éprouveroit seroit sousdouble de celle du cylindre. *C. Q. F. D.*

On peut comparer par la même méthode les autres figures entr'elles quant à la résistance qu'elles éprouvent, & trouver celles qui sont les plus propres à conserver longtemps leur mouvement dans des milieux résistans. Si par exemple, on veut construire, sur la base circulaire $CEBH$, décrite du centre O & du rayon OC , un cône tronqué $CBGF$, dont la hauteur soit OD , & qui soit de tous les cônes tronqués, construits sur la même base & la même hauteur, & qui se meuvent suivant leur axe du côté de D , celui qui éprouve la moindre résistance; coupez en deux parties égales la hauteur OD en Q , & prolongez OQ en S , en sorte que $QS = QC$, & $CFGB$ fera le cône tronqué demandé.

D'où on tire, chemin faisant, (l'angle CSB étant toujours aigu) que si le solide $ADBE$ est formé par la révolution de la figure elliptique ou ovale $ADBE$ autour de l'axe AB , & que la figure génératrice soit touchée par les trois droites FG, GH, HI dans les points F, B & I , selon cette loi, que GH soit perpendiculaire à l'axe dans le point de contact B , & que FG, HI fassent avec la même ligne GH des angles FGB, BHI de 135 degrés, le solide formé par la révolution de la figure $ADFGHIE$ autour du même axe AB éprouvera moins de résistance que le premier solide, pourvu que l'un & l'autre avancent suivant l'axe AB , & que B soit le côté qui précède dans l'un & dans l'autre, je ne crois pas cette proposition inutile pour la construction des vaisseaux.

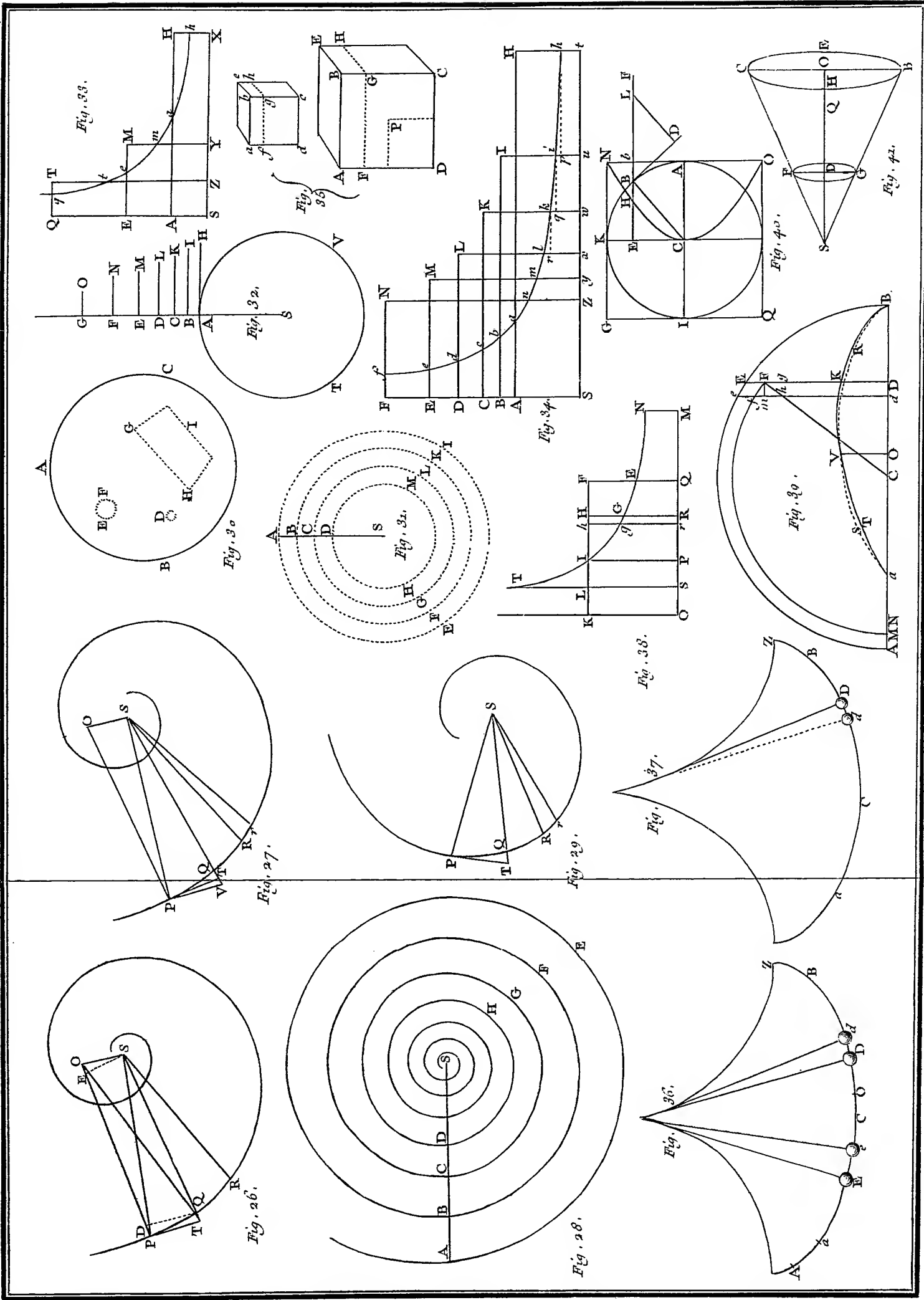
Que si la figure $DNFG$ est une courbe d'une telle nature, que si par un de ses points quelconques N on abaisse la perpendiculaire NM sur l'axe AB , & que d'un point donné G on mène la droite GR qui soit parallèle à la droite qui touche la figure en N , & qui coupe en R l'axe prolongé, on aura $MN:GR::GR^3:4BR \times GB^2$; le solide formé par la révolution de cette figure autour de l'axe AB éprouvera une moindre résistance,

en se mouvant de A vers B , dans le milieu rare dont on a parlé, qu'aucun autre solide circulaire quelconque décrit sur la même hauteur & la même base.

PROPOSITION XXXV. PROBLÈME VII.

On demande la résistance qu'éprouve un globe qui se meut uniformément dans un milieu rare formé de très-petites particules égales, en repos, & situées librement à des distances égales les unes des autres.

Cas 1. Supposé que le cylindre qui a le même diamètre, & la même hauteur que le globe s'avance avec la même vitesse, dans le même milieu, & dans le sens de son axe. Que les particules du milieu dans lequel le globe ou le cylindre se plonge rejaillissent avec toute la force de la réflexion. Comme la résistance que le globe éprouve, est (par la dernière Proposition) la moitié de celle qu'éprouve le cylindre, le globe étant au cylindre comme 2 à 3, & le cylindre en tombant perpendiculairement sur ces particules, qui rejaillissent très-fortement, leur communiquant une vitesse double de la sienne : le cylindre, dans le temps dans lequel il aura parcouru en avançant uniformément la moitié de la longueur de son axe, communiquera aux particules du milieu un mouvement, qui sera au mouvement total du cylindre, comme la densité du milieu est à la densité du cylindre ; & le globe dans le temps dans lequel il parcourt toute la longueur de son diamètre en avançant uniformément communiquera le même mouvement à ces particules ; & dans le temps pendant lequel il parcourt les deux tiers de son diamètre il communiquera aux particules un mouvement qui sera à son mouvement total, comme la densité du milieu à la densité du globe. Et par conséquent, le globe éprouve une résistance qui est à la force qui peut produire tout son mouvement ou le lui ôter, dans le temps qu'il met à parcourir les deux tiers de son diamètre en avançant uniformément, comme la densité du milieu est à la densité du globe.



Cas 2. Supposons que les particules du milieu qui tombent sur le globe ou sur le cylindre ne soient pas réfléchies ; & que le cylindre en tombant perpendiculairement sur ces particules leur communique la vitesse simple qui l'anime , il souffrira alors une résistance qui sera sousdouble de celle qu'il éprouve dans le premier cas , & la résistance qu'éprouvera le globe sera par conséquent aussi sousdouble de ce qu'elle étoit auparavant.

Cas 3. Supposons que les particules du milieu rejaillissent de dessus le globe par la force de la réflexion qu'on suppose n'être ni nulle , ni grande , mais moyenne ; la résistance qu'éprouvera le globe sera dans cette même raison , c'est-à-dire , moyenne entre la résistance dans le premier cas , & la résistance dans le second. *C. Q. F. T.*

Cor. 1. Delà , si le globe & les particules sont infiniment dures & privées de toute force élastique , & par conséquent aussi de toute force réfléchissante ; la résistance que le globe éprouvera sera à la force par laquelle tout son mouvement peut lui être communiqué ou ôté , dans le temps dans lequel un globe quadruple parcourt la troisième partie de son diamètre , comme la densité du milieu à la densité du globe.

Cor. 2. La résistance que le globe éprouve est , toutes choses égales , en raison doublée de la vitesse.

Cor. 3. Cette résistance est aussi , toutes choses égales , en raison doublée du diamètre.

Cor. 4. Cette résistance est encore comme la densité du milieu , toutes choses égales.

Cor. 5. Et par conséquent cette résistance est dans la raison composée de la raison doublée de la vitesse , de la raison doublée du diamètre , & de la raison de la densité du milieu.

Cor. 6. Le mouvement du globe & la résistance qu'il éprouve , peuvent s'exprimer ainsi. Soit *AB* le temps dans lequel le globe peut perdre tout son mouvement par la résistance qu'il éprouve , laquelle on suppose uniformément continuée. Soient élevées *AD* ,

Fig. 43.

BC perpendiculairement sur AB , & que BC exprime le mouvement total du corps, soit tracée, par le point C , l'hyperbole CF dont les asymptotes soient AD , AB , & soit prolongée AB jusqu'à un point quelconque E . Soit élevée ensuite la perpendiculaire EF qui rencontre l'hyperbole en F , & soit achevé le parallélogramme $CBEF$, enfin soit tirée AF qui rencontre BC en H . Si le globe dans un temps quelconque BE décrit dans un milieu non résistant l'espace $CBEF$ par son mouvement primitif BC continué uniformément, lequel espace $CBEF$ est représenté par l'aire du parallélogramme, le même corps, dans un milieu résistant, décrira l'espace $CBEF$, représenté par l'aire de l'hyperbole, & son mouvement à la fin de ce temps sera représenté par EF ordonnée à l'hyperbole, & alors il aura perdu la partie FG de son mouvement. Et la résistance qu'il éprouvera à la fin du même temps sera représentée par la longueur BH , la partie CH de la résistance étant détruite. Tout cela est clair par les Cor. 1. & 3. de la Prop. 5. du Liv. 2.

Cor. 7. Delà, si le globe pendant le temps T perd tout son mouvement M par la résistance R continuée uniformément : ce même globe perdra dans le temps t dans un milieu résistant la partie $\frac{tM}{T+t}$ de son mouvement M , par la résistance R décroissante en raison doublée de la vitesse, la partie $\frac{TM}{T+t}$ demeurant la même ; & il décrira un espace qui sera à l'espace décrit par le mouvement uniforme M , dans le même temps t , comme le logarithme du nombre $\frac{T+t}{T}$ multiplié par le nombre 2, 302585092994 est au nombre $\frac{t}{T}$, à cause que l'aire hyperbolique $BCFE$ est au rectangle $BCEG$ dans cette Proportion.

S C H O L I E.

LIVRE
SECOND.

J'ai exposé dans cette Proposition la résistance & la retardation des projectiles sphériques dans les milieux qui ne sont pas continus, & j'ai fait voir que cette résistance est à la force par laquelle le mouvement total du globe peut être produit ou détruit, dans le temps qu'il emploie à parcourir les deux tiers de son diamètre par une vitesse uniformément continuée, comme la densité du milieu est à la densité du globe, pourvu que le globe & les particules du milieu soient très-élastiques, & qu'elles aient beaucoup de force réfléchissante : & enfin que cette force est deux fois moindre lorsque le globe & les particules du milieu sont infiniment dures, & entièrement incapables de réflexion. Dans les milieux continus tels que l'eau, l'huile chaude, & le vif-argent, dans lesquels le globe ne tombe pas immédiatement sur toutes les particules résistantes du fluide, mais presse seulement les particules les plus voisines, celles-là en pressent d'autres, & les autres d'autres encore, la résistance est encore deux fois moindre. Le globe, dans de tels milieux très-fluides, éprouve une résistance, qui est à la force qui peut lui ôter ou lui communiquer tout son mouvement, dans le temps dans lequel il peut parcourir les $\frac{2}{3}$ parties de son diamètre, par son mouvement uniformément continué, comme la densité du milieu est à la densité du globe. C'est ce que je tâcherai de faire voir dans les Propositions suivantes.

PROPOSITION XXXVI. PROBLÈME VIII.

Trouver le mouvement de l'eau qui s'écoule par un trou fait dans le fond d'un vase cylindrique.

Soit $ACDB$ le vase cylindrique, AB son ouverture supérieure, CD le fond de ce vase parallèle à l'horizon, EF un trou circulaire fait dans le milieu de ce fond, G le centre de ce trou,

Fig. 44.

& GH l'axe du cylindre perpendiculaire à l'horison. Supposez un cylindre de glace $APQB$ de la même largeur que l'intérieur du vase, qui ait le même axe, & qui descende continuellement avec un mouvement uniforme; & que ses parties, dans le moment qu'elles auront atteint la superficie AB , se liquéfient, & en se convertissant en eau, qu'elles s'écoulent dans le vase par leur gravité, & forment, en tombant, une cataracte ou colonne d'eau $ABNFEM$ qui passe par le trou EF & qui l'emplisse entièrement. Supposez que la vitesse avec laquelle cette glace descend soit uniforme, ainsi que celle de l'eau contigue dans le cercle AB , que cette vitesse soit celle que cette eau peut acquérir en tombant, & en parcourant dans sa chute la hauteur IH , & que IH & HG soient en ligne droite. Par le point I soit menée la ligne KL parallèle à l'horison & rencontrant en K & en L les côtés de la glace. La vitesse de l'eau qui s'écoule par le trou EF sera la même que celle que l'eau peut acquérir en tombant de I , & en parcourant dans sa chute la hauteur IG . Donc, par les Théorèmes de Galilée, IG sera à IH en raison doublée de la vitesse de l'eau qui s'écoule par le trou, à la vitesse de l'eau dans le cercle AB , c'est-à-dire, en raison doublée du cercle AB au cercle EF ; car les vitesses de l'eau qui passe dans le même temps, & en quantité égale par différens cercles sont réciproquement comme les aires de ces cercles. Il s'agit ici de la vitesse de l'eau qui s'écoule vers l'horison. Quant au mouvement parallèle à l'horison, par lequel les parties de l'eau qui tombent s'approchent l'une de l'autre, il ne doit point être considéré ici parce qu'il ne vient point de la gravité, & qu'il ne change rien au mouvement perpendiculaire à l'horison qui est produit par la gravité. Nous supposons cependant que les parties de l'eau ayent quelque cohérence, & que par leur cohésion elles s'approchent l'une de l'autre en tombant, par des mouvemens parallèles à l'horison; en sorte qu'elles forment une seule cataracte, & qu'elles ne soient point divisées en plusieurs cataractes. Mais nous ne faisons point at-

tention ici au mouvement parallèle à l'horizon qui est produit par cette cohésion.

Cas 1. Concevez que toute la cavité du vase, laquelle environne l'eau tombante *ABNFEM*, soit pleine de glace, enforte que l'eau passe à travers cette glace comme à travers un antonnoir. Si l'eau ne frotte point la glace, ou, ce qui est la même chose, si elle coule librement le long de la glace, & qu'à cause de son parfait poli, elle n'éprouve aucune résistance par son frottement contre la glace, elle s'écoulera par le trou *EF* avec la même vitesse qu'auparavant, & tout le poids de la colonne d'eau *ABNFEM* sera employé à produire cet écoulement comme auparavant, & le fond du vase soutiendra le poids de la glace qui environne la colonne.

Supposez que la glace se fonde dans le vase; l'écoulement de l'eau demeurera le même qu'auparavant, quant à la vitesse. Car elle ne sera pas moindre, puisque la glace qui est devenue eau fait effort pour descendre: & elle ne sera pas plus grande parce que la glace devenue eau ne peut descendre qu'elle n'empêche l'autre eau, dont la chute est égale à la sienne, de descendre, & la même force doit donner la même vitesse à l'eau qui s'écoule.

Mais le trou dans le fond du vase, doit être un peu plus grand qu'auparavant, à cause des mouvemens obliques des particules de l'eau qui s'écoule. Car toutes les particules de l'eau ne passent pas perpendiculairement par le trou; mais venant de toutes parts des côtés du vase & convergeant vers ce trou, elles y passent par des mouvemens obliques; & tendant toutes à s'échapper par embas leur mouvement conspire avec celui de la veine d'eau qui passe perpendiculairement. Cette veine d'eau est un peu plus mince hors de l'ouverture que dans l'ouverture même, son diamètre & celui de l'ouverture, si je les ai bien mesurés, étant l'un à l'autre, à peu près, comme 5 à 6 ou comme $5\frac{1}{2}$ à $6\frac{1}{2}$. Je m'étois servi d'une lame plate très-mince percée dans le milieu, & dont l'ouverture circulaire avoit $\frac{1}{2}$ parties de pouces de diamètre. Et de

peur que la veine d'eau qui s'écouloit ne fut accélérée en tombant, & ne devint plus mince par l'accélération, je n'attachai point cette lame au fond du vase, mais à un de ses côtés, afin que la veine sortit par une ligne parallèle à l'horison. Ensuite lorsque le vase fut plein d'eau, j'ouvris le trou pour la laisser écouler; & le diamètre de la veine, mesuré exactement, étoit, à la distance de près d'un demi ponce de l'ouverture, de $\frac{21}{40}$ parties de ponces. Donc le diamètre de ce trou circulaire étoit au diamètre de la veine d'eau comme 25 à 21 à peu près. Par-là, l'eau en passant par l'ouverture convergeoit de toutes parts, & la veine devenoit ensuite plus mince & plus accélérée à la distance d'un demi ponce de l'ouverture que dans l'ouverture même, dans la raison de 25×25 à 21×21 , ou de 17 à 12 à peu près, c'est-à-dire, environ dans la raison soufdoublée de deux à un. Et il est certain, par l'expérience, que la quantité de l'eau qui s'écoula en un temps donné par l'ouverture circulaire faite dans le fond du vase, est la même que celle qui doit s'écouler dans le même temps avec la vitesse dont on a parlé, non par cette ouverture, mais par une ouverture circulaire dont le diamètre est au diamètre de cette première ouverture comme 21 à 25. Donc cette eau qui s'écoule a, à peu près, la même vitesse en embas, dans cette même ouverture, qu'un corps grave peut acquérir en tombant & en parcourant dans sa chute la moitié de la hauteur de l'eau stagnante dans le vase. Mais après être sortie du vase, elle s'accélére en convergeant jusqu'à ce qu'elle soit arrivée à une distance du trou qui soit presque égale à son diamètre, & qu'elle ait acquis une vitesse plus grande, en raison soufdoublée de 2 à 1 à peu près, que celle qu'un corps grave peut acquérir en tombant & en parcourant à peu près dans sa chute toute la hauteur de l'eau qui est en repos dans le vase.

Dans ce qui suit, le diamètre de la veine fera donc représenté par la plus petite ouverture que nous nommerons EF . Soit supposé un plan VW parallèle à l'ouverture EF & placé au-dessus

d'elle à une distance égale à peu près au diamètre de cette ouverture, & soit dans ce plan VW une ouverture ST plus grande que la première ; que la veine passe aussi par cette ouverture, que cette veine emplisse exactement l'ouverture inférieure EF , le diamètre de l'ouverture supérieure étant au diamètre de l'ouverture inférieure comme 25 à 21 à peu près. De cette façon la veine passera perpendiculairement par l'ouverture inférieure ; & la quantité de l'eau qui s'écoulera sera la même à peu près, eu égard à la grandeur de l'ouverture, que celle que la solution du Problème requiert. Enforte qu'on peut regarder l'espace renfermé par ces deux plans & la veine d'eau qui s'écoule, comme le fond du vase. Afin que la solution du problème devienne plus simple & plus mathématique, il vaut mieux prendre le seul plan inférieur pour le fond du vase, & supposer que l'eau qui passoit à travers la glace, ou l'antoinoir, & qui s'écouloit du vase par l'ouverture $E F$ faite dans le plan inférieur conservoit toujours son mouvement, & la glace son état de repos. Soit donc, dans ce qui suivra, ST le diamètre du trou circulaire décrit du centre Z par lequel la cataracte s'écoule du vase lorsque toute l'eau contenue dans le vase est fluide. Et soit EF le diamètre du trou rempli exactement par la cataracte en tombant, soit que l'eau sorte du vase par le trou supérieur ST , soit qu'elle tombe par les parois de la glace qui est dans le vase, comme à travers un antoinoir. Si le diamètre ST du trou supérieur est au diamètre EF du trou inférieur comme 25 à 21 à peu près, & que la distance perpendiculaire entre les plans des trous soit égale au diamètre du trou inférieur EF . La vitesse de l'eau, qui s'écoule du vase par le trou ST , sera dans ce même trou celle que le corps peut acquérir en tombant de la moitié de la hauteur $I Z$: mais la vitesse de l'une & l'autre cataracte qui tombent sera dans l'ouverture EF celle que le corps peut acquérir en tombant de toute la hauteur IG .

Cas 2. Si le trou EF n'est pas dans le milieu du fond du vase,

LIVRE
SECOND.

Fig. 45.

mais qu'il soit placé quelqu'autre part : l'eau s'écoulera avec la même vitesse qu'auparavant, pourvu que la grandeur du trou soit la même. Car quoiqu'un corps grave employe un temps plus long à tomber à la même profondeur par une ligne oblique, que par une ligne perpendiculaire, il acquiert, dans l'un & l'autre cas, la même vitesse en tombant, comme *Galilée* l'a démontré.

Cas 3. La vitesse de l'eau qui s'écouleroit par une ouverture faite dans un des côtés du vase seroit encore la même. Car si l'ouverture est petite, & que l'intervalle entre les superficies *AB* & *KL* soit presque nul, le filet d'eau qui sortira horizontalement prendra une forme parabolique : & on connoitra, par le paramètre de cette parabole, que la vitesse de l'eau qui s'écoule est celle qu'un corps pourroit acquérir en tombant de la hauteur *HG* ou *IG* de l'eau qui est en repos dans le vase. Et ayant fait l'expérience, j'ai trouvé que si la hauteur de l'eau qui est en repos dans le vase est de 20 pouces au-dessus du trou, & que la hauteur du trou au-dessus du plan parallèle à l'horison soit aussi de 20 pouces, le filet d'eau qui jaillira tombera dans ce plan, environ à la distance de 37 pouces de la perpendiculaire abaissée de ce trou sur le plan. Si on faisoit abstraction de la résistance, le filet d'eau devroit tomber dans ce plan à la distance de quarante pouces, le paramètre de la parabole que ce filet d'eau formeroit étant de 80 pouces.

Cas 4. De plus, l'eau qui s'écoule sortiroit avec la même vitesse si quelque cause la faisoit jaillir en en-haut. Car un petit filet d'eau monteroit par un mouvement perpendiculaire à la hauteur *GH* ou *GI* de l'eau qui est en repos dans le vase, si son élévation n'étoit un peu diminuée par la résistance de l'air, & par conséquent elle s'écoule avec la vitesse qu'elle pourroit acquérir en tombant de cette hauteur. Chaque particule de l'eau qui est en repos dans le vase est également pressée de tous côtés, (par la Prop. 19. du Liv. 2.) & en cédant à cette pression elle est portée avec la même force de toutes parts, soit qu'elle descende

par le trou fait dans le fond du vase, soit qu'elle s'écoule horizontalement par un trou fait dans un de ses côtés, soit qu'elle sorte par un canal & qu'ensuite elle monte par un petit trou fait dans la partie supérieure du canal. La vitesse avec laquelle l'eau s'écoulera sera celle que nous avons déterminée dans cette Proposition; c'est non seulement ce que l'on peut conclure par le raisonnement, mais encore ce qui est évident par les expériences très-connues que nous venons de rapporter.

Cas 5. La vitesse de l'eau qui s'écoule est la même, soit que la forme de l'ouverture soit circulaire, soit qu'elle soit quarrée, triangulaire, ou de figure quelconque, pourvu que sa capacité soit la même. Car la vitesse de l'eau qui s'écoule ne dépend point de la figure de l'ouverture, mais de sa hauteur au-dessous du plan KL .

Cas 6. Si la partie inférieure du vase $ABCD$ est plongée dans une eau dormante, & que la hauteur de l'eau dormante au-dessus du fond du vase soit GR : la vitesse avec laquelle l'eau qui est dans le vase s'écoulera par l'ouverture EF dans l'eau stagnante sera celle que l'eau pourroit acquérir en tombant de la hauteur IR . Car tout le poids de l'eau contenue dans le vase, & qui est au-dessous de la superficie de l'eau dormante, sera soutenu en équilibre par le poids de l'eau dormante, donc, il accélérera très-peu le mouvement de l'eau qui descend dans le vase; ce qu'on peut voir très-clairement par les expériences, en mesurant les temps dans lesquels l'eau s'écoule.

Cor. 1. Delà, si la hauteur CA de l'eau est prolongée en K , enforte que AK soit à CK en raison doublée, de l'aire du trou fait dans une partie quelconque du fond du vase à l'aire du cercle AB : la vitesse de l'eau qui s'écoule sera égale à la vitesse que l'eau peut acquérir en tombant, & en parcourant dans sa chute la hauteur KC .

Cor. 2. Et la force qui peut produire tout le mouvement de l'eau qui s'écoule est égale au poids de la colonne d'eau cylindri-

que dont la base est l'ouverture EF , & la hauteur $\frac{1}{2}GI$ ou $\frac{1}{2}CK$. Car dans le temps que l'eau jaillissante pourroit égaler cette colonne, elle pourroit acquérir, en tombant par son poids de la hauteur GI , la même vitesse que celle avec laquelle elle jaillit.

Cor. 3. Le poids de toute l'eau dans le vase $ABCD$ est à la partie de ce poids qui est employée à faire écouler l'eau comme la somme des cercles AB & EF au double du cercle EF . Car soit IO moyenne proportionnelle entre IH & IG ; l'eau qui sort par l'ouverture EF , pendant le temps qu'une goutte tombant de I employe à parcourir la hauteur IG , sera égale au cylindre dont la base est le cercle EF & la hauteur $\frac{1}{2}IG$, c'est-à-dire, au cylindre dont la base est le cercle AB & la hauteur $\frac{1}{2}IO$, car le cercle EF est au cercle AB en raison sousdoublée de la hauteur IH à la hauteur IG , c'est-à-dire, dans la raison simple de la moyenne proportionnelle IO à la hauteur GI : & dans le temps qu'une goutte tombant de I peut parcourir la hauteur IH , l'eau qui s'écoule sera égale au cylindre dont la base est le cercle AB & la hauteur $\frac{1}{2}IH$: & dans le temps dans lequel la goutte en tombant de I par H en G décrit la différence des hauteurs HG , l'eau qui sort, c'est-à-dire, l'eau totale dans le solide $ABNFEM$ sera égale à la différence des cylindres, c'est-à-dire, au cylindre dont la base est AB & la hauteur $\frac{1}{2}HO$. Et par conséquent, l'eau totale contenue dans le vase $ABCD$ est à toute l'eau qui tombe dans le solide $ABNFEM$ comme HG à $\frac{1}{2}HO$, c'est-à-dire, comme $HO + OG$ à $\frac{1}{2}HO$, ou $IH + IO$ à $\frac{1}{2}IH$. Mais le poids de toute l'eau dans le solide $ABNFEM$ est employé à la faire écouler: & par conséquent, le poids de toute l'eau du vase est à la partie de ce poids employée à produire l'écoulement, comme $IH + IO$ à $\frac{1}{2}IH$, & par conséquent, comme la somme des cercles EF & AB au double du cercle EF .

Cor. 4. Et delà, le poids de toute l'eau contenue dans le vase $ABCD$ est à l'autre partie du poids que le fonds du vase soutient

tient, comme la somme des cercles AB & EF est à leur différence EF .

Cor. 5. La partie du poids que le fond du vase soutient, est à l'autre partie du poids qui est employée à l'écoulement de l'eau, comme la différence des cercles AB & EF est au double du plus petit cercle EF , ou comme l'aire du fond du vase au double de l'aire du trou.

Cor. 6. Mais la partie du poids, par laquelle seule le fond est pressé, est au poids total de l'eau qui incombe perpendiculairement sur le fond, comme le cercle AB est à la somme des cercles AB & EF , ou comme le cercle AB est à l'excès du double du cercle AB sur le fond du vase. Car la partie du poids par laquelle seule le fond est pressé est (par le *Cor. 4.*) au poids de toute l'eau contenue dans le vase, comme la différence des cercles AB & EF est à la somme de ces mêmes cercles : & le poids de toute l'eau contenue dans le vase est au poids de toute l'eau incombante perpendiculairement sur le fond, comme le cercle AB est à la différence des cercles AB & EF . Donc la partie du poids, par laquelle seule le fond est pressé, est au poids de toute l'eau qui incombe perpendiculairement sur le fond, comme le cercle AB est à la somme des cercles AB & EF , ou comme l'excès du double du cercle AB sur le fond.

Cor. 7. Si dans le milieu du trou EF on place un petit cercle PQ décrit du centre G & parallèle à l'horison : le poids de l'eau que ce petit cercle soutient est plus grand que la troisième partie du poids du cylindre d'eau, dont la base est ce petit cercle & la hauteur GH . Car soit $ABNFEM$ la cataracte ou la colonne d'eau qui tombe, & dont l'axe est GH comme ci-devant, & supposez que toute l'eau qui est dans le vase se gèle, tant celle qui entoure la cataracte que celle qui est au-dessus du petit cercle, & dont la fluidité n'est pas nécessaire pour opérer la plus vite descente de l'eau. Soit de plus, PQH la colonne d'eau congelée au-dessus du petit cercle, dont le sommet soit H & la hauteur

LIVRE
SECOND.

Fig. 45.

Fig. 46.

Fig. 46.

GH. Et supposez que cette cataracte vienne à tomber par son poids entier, & qu'elle n'incombe plus sur *PHQ*, mais qu'elle coule sans éprouver aucun frottement, si ce n'est, peut-être, vers le sommet même de la glace vers lequel la cataracte dans le commencement de la chute commence à être un peu concave. Comme l'eau congelée *AMEC*, *BNFD* autour de la cataracte est convexe par la superficie interne *AME*, *BNF* qui est du côté de la cataracte, de même cette colonne *PQH* sera convexe vers la cataracte, & par conséquent, elle sera plus grande que le cône dont la base seroit le petit cercle *PQ* & la hauteur la ligne *GH*, c'est-à-dire, qu'elle sera plus grande que le tiers du cylindre décrit sur cette même base & ayant la même hauteur. Or ce petit cercle soutient le poids de cette colonne, c'est-à-dire, un poids qui est plus grand que le poids du cône, ou que celui de la troisième partie de ce cylindre.

Cor. 8. Le poids de l'eau que le très-petit cercle *PQ* soutient, paroît être moindre que le poids des deux tiers du cylindre d'eau dont la base est le petit cercle & la hauteur *GH*: car les choses posées ci-dessus subsistant, qu'on suppose décrite la moitié d'un sphéroïde dont la base est ce petit cercle, & le demi axe ou la hauteur *HG*. Cette figure sera égale aux deux tiers de ce cylindre, & renfermera la colonne d'eau congelée *PQH* dont le petit cercle *PQ* soutient le poids: car afin que le mouvement de l'eau soit fort direct, il faut que la superficie externe de cette colonne concoure avec la base *PQ* sous un angle un peu aigu, à cause que l'eau est perpétuellement accélérée en tombant, & qu'en vertu de son accélération la colonne devient plus mince; & comme cet angle est moindre qu'un droit, cette colonne, par embas, sera renfermée dans l'intérieur du demi sphéroïde, & elle se terminera en pointe par le haut, afin que le mouvement horizontal de l'eau ne soit pas infiniment plus prompt vers le sommet du sphéroïde que son mouvement vers l'horison. Et plus le cercle *PQ* sera petit, plus le haut de la colonne sera resserré;

lorsque ce cercle sera infiniment diminué, l'angle PHQ diminuera aussi à l'infini, & par conséquent la colonne sera renfermée dans l'intérieur du demi sphéroïde. Cette colonne est donc moindre que le demi sphéroïde, ou que les deux tiers du cylindre dont la base est ce petit cercle & la hauteur GH ; or ce petit cercle soutient la force de l'eau, laquelle est égale au poids de cette colonne, puisque le poids de l'eau environnante est employé à la faire écouler.

Cor. 9. Le poids de l'eau que le très-petit cercle PQ soutient, est égal au poids du cylindre d'eau dont la base est ce petit cercle & la hauteur $\frac{1}{2} GH$ à peu près. Car ce poids est moyen arithmétique entre le poids du cône, & celui du demi sphéroïde dont on a parlé. Mais si ce petit cercle n'étoit pas extrêmement petit, & qu'on l'augmentât jusqu'à ce qu'il fut égal à l'ouverture EF , il soutiendrait le poids de toute l'eau qui s'appuie dessus perpendiculairement, c'est-à-dire, le poids du cylindre d'eau, dont la base est ce petit cercle & la hauteur GH .

Cor. 10. Et (selon moi) le poids que ce petit cercle soutient est toujours au poids du cylindre d'eau, dont la base est ce petit cercle & la hauteur $\frac{1}{2} GH$, comme EF^2 est à $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$, ou comme le cercle EF est à l'excès de ce cercle sur la moitié du petit cercle PQ à peu près.

LEMMES IV.

La résistance d'un cylindre qui avance uniformément selon son axe, ne change point, soit que son axe soit augmenté ou diminué; elle est donc la même que la résistance du cercle décrit sur le même diamètre, & qui s'avance avec la même vitesse selon une ligne droite perpendiculaire à son plan.

Car les côtés du cylindre s'opposent très-peu à son mouvement : & le cylindre se change en cercle si on diminue infiniment son axe.

LIVRE.
SECOND.

Fig. 46.

PROPOSITION XXXVII. THÉORÈME XXIX.

La résistance causée par la grandeur de la section transversale d'un cylindre qui se meut uniformément selon son axe dans un milieu comprimé, infini, & non élastique, est à la force qui peut produire ou arrêter tout le mouvement qu'il a pendant qu'il parcourt le quadruple de son axe, comme la densité du milieu est à la densité du cylindre à peu près.

Fig. 47. Car si le vase $ABCD$ touche par son fond CD la superficie de l'eau stagnante, & que l'eau s'écoule de ce vase dans l'eau stagnante par le canal cylindrique $EFTS$ perpendiculaire à l'horizon, qu'on place le petit cercle PQ , qui est parallèle à l'horizon, où l'on voudra dans le milieu du canal, & qu'on prolonge CA en K , en sorte que AK soit à CK dans la raison doublée de la raison que l'excès de l'orifice EF du canal sur le petit cercle PQ a au cercle AB : il est clair, (par le cas 5, le cas 6, & le Cor. 1. de la Prop. 36.) que la vitesse de l'eau qui passe par l'espace annulaire entre le petit cercle & les côtés du vase, sera celle que l'eau peut acquérir en tombant, & en parcourant dans sa chute la hauteur KC ou IG .

Et, (par le Cor. 10. de la Prop. 36.) si on suppose la largeur du vase infinie, en sorte que la petite ligne HI s'évanouisse, & que les hauteurs IG , HG deviennent égales; la force de l'eau qui s'écoule dans le petit cercle fera au poids du cylindre dont la base est ce petit cercle & la hauteur $\frac{1}{2}IG$, comme EF^2 est à $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ à peu près. Car la force de l'eau qui s'écoule par un mouvement uniforme dans tout le canal, fera la même dans le petit cercle PQ en quelque lieu du canal qu'il soit placé.

Soit à présent supposé que les ouvertures EF , ST du canal soient fermées, que le petit cercle monte dans ce fluide comprimé de toutes parts, & qu'il force, par son ascension, l'eau supérieure de descendre par l'espace annulaire compris entre le petit

cercle & les côtés du canal : la vitesse du petit cercle qui monte, sera à la vitesse de l'eau qui descend, comme la différence des cercles EF & PQ au cercle PQ , & la vitesse du petit cercle qui monte sera à la somme des vitesses, c'est-à-dire, à la vitesse relative de l'eau descendante avec laquelle elle surpasse celle du cercle ascendant, comme la différence des cercles EF , PQ est au cercle EF , ou comme $EF^2 - PQ^2$ est à EF^2 . Soit cette vitesse relative égale à la vitesse avec laquelle on a fait voir ci-dessus que l'eau passoit par ce même espace annulaire pendant que le petit cercle demeurait immobile, c'est-à-dire, à la vitesse que l'eau peut acquérir en tombant & en parcourant dans sa chute la hauteur IG : la force de l'eau dans le petit cercle qui monte sera la même qu'auparavant, (par le Cor. 5. des Loix) c'est-à-dire, que la résistance du petit cercle qui monte sera au poids du cylindre d'eau dont la base est ce petit cercle & la hauteur $\frac{1}{2} IG$, comme EF^2 est à $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$ à peu près. Mais la vitesse du petit cercle sera à la vitesse que l'eau peut acquérir en tombant & en parcourant dans sa chute la hauteur IG , comme $EF^2 - PQ^2$ est à EF^2 .

Qu'on augmente la largeur du canal à l'infini : les raisons entre $EF^2 - PQ^2$ & EF^2 , ainsi que la raison entre EF^2 , & $EF^2 - \frac{1}{2} PQ^2$ deviendront à la fin des raisons d'égalité. Et par conséquent la vitesse du petit cercle sera alors celle que l'eau peut acquérir en tombant & en parcourant dans sa chute la hauteur IG , mais sa résistance sera égale au poids du cylindre dont la base est ce petit cercle & la hauteur la moitié de la hauteur IG , de laquelle hauteur le cylindre doit tomber pour acquérir la même vitesse que le petit cercle qui remonte ; & le cylindre parcourra avec cette vitesse & dans le temps employé à tomber le quadruple de son axe. Mais la résistance du cylindre qui s'avance avec cette vitesse selon son axe est la même que la résistance du petit cercle (par le Lemme 4.). Donc elle est égale, à peu près, à la force qui peut produire le mouvement qu'il a

pendant qu'il parcourt le quadruple de son axe.

Si on augmente ou diminue l'axe du cylindre, son mouvement, ainsi que le temps employé à parcourir le quadruple de cet axe augmentera ou diminuera dans la même raison, donc cette force, qui peut produire ou détruire le mouvement augmenté ou diminué, pendant un temps pareillement augmenté ou diminué, ne changera point; & elle est par conséquent égale à la résistance du cylindre, car elle demeure toujours la même, par le Lemme 4.

Si la densité du cylindre augmente ou diminue, son mouvement, ainsi que la force qui peut produire ou détruire le mouvement dans le même temps augmentera ou diminuera dans la même raison. Donc la résistance d'un cylindre quelconque sera à la force par laquelle tout son mouvement peut être produit ou détruit, pendant le temps qu'il emploie à parcourir le quadruple de son axe, comme la densité du milieu est à la densité du cylindre à peu près. *C. Q. F. D.*

Le fluide doit être comprimé pour qu'il soit continu, & il doit être continu & non élastique, afin que toute la pression qui vient de sa compression se propage en un instant, & qu'agissant également sur toutes les parties du corps mû, il ne change point sa résistance. La pression qui est l'effet du mouvement du corps est employée à mouvoir les parties du fluide, & produit de la résistance. Mais la pression qui provient de la compression du fluide, quelque forte qu'elle soit, si elle se propage en un instant, ne produit aucun mouvement dans les parties du fluide continu, ni aucun changement dans le mouvement; ainsi elle n'augmente ni ne diminue la résistance. Assurément l'action du fluide qui vient de sa compression ne peut pas être plus forte dans les parties postérieures du corps mû que dans les parties antérieures, donc la résistance dont on a parlé dans cette Proposition ne peut diminuer & ne sera pas plus forte dans les parties antérieures que dans les postérieures, pourvu que la propagation se fasse avec

infiniment plus de vitesse que le mouvement du corps pressé. Et si le fluide est continu, & qu'il ne soit point élastique, cette propagation se fera infiniment plus vite & sera instantanée.

Cor. 1. Les résistances qu'éprouvent les cylindres qui s'avancent uniformément dans le sens de leurs axes dans des milieux continus & infinis, sont en raison composée de la raison doublée des vitesses, de la raison doublée des diamètres, & de la raison de la densité des milieux.

Cor. 2. Si la largeur du canal n'est pas augmentée à l'infini, mais que le cylindre renfermé dans un milieu en repos avance dans le sens de son axe, & qu'en même temps son axe coïncide avec celui du canal : la résistance qu'il éprouvera sera à la force par laquelle tout son mouvement peut être produit ou détruit, dans le temps qu'il emploie à parcourir le quadruple de son axe, en raison composée de la raison simple de EF^2 à $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$, de la raison doublée de EF^2 à $EF^2 - PQ^2$, & de la raison de la densité du milieu à la densité du cylindre.

Fig. 47.

Cor. 3. Les mêmes choses étant posées, & la longueur L étant au quadruple de l'axe du cylindre dans une raison composée de la raison simple de $EF^2 - \frac{1}{2}PQ^2$ à EF^2 & de la raison doublée de $EF^2 - PQ^2$ à EF^2 : la résistance qu'éprouvera le cylindre sera à la force qui peut produire ou détruire tout son mouvement, pendant le temps employé à parcourir la longueur L , comme la densité du milieu est à la densité du cylindre.

S C H O L I E.

Dans cette Proposition nous avons trouvé la résistance qui vient de la grandeur de la section transversale du cylindre seulement, & nous avons négligé la partie de la résistance qui peut venir de l'obliquité des mouvemens. Car de même que dans le premier cas de la Prop. 36. l'obliquité des mouvemens, par lesquels les parties d'eau contenues dans le vase convergeoient de toutes parts vers l'ouverture EF , empêchoit l'écoulement de cette

eau par cette ouverture : ainsi dans cette Proposition , l'obliquité des mouvemens , par lesquels les parties de l'eau pressées par le bout antérieur du cylindre , cedent à la pression & divergent de tous côtés , retarde leur passage par les lieux qui sont autour des parties antécédentes du cylindre en allant vers ses parties postérieures , augmente la résistance , & fait que le fluide est agité à une plus grande distance , & cela , à peu près , dans la même raison , que celle dans laquelle l'écoulement de l'eau hors du vase diminue , c'est-à-dire , en raison doublée de 25 à 21 à peu près. Et de même que dans le premier cas de cette Proposition , nous avons fait en sorte que les parties de l'eau passassent en très-grand nombre perpendiculairement par l'ouverture *EF* , en supposant que toute l'eau contenue dans le vase qui étoit gelée autour de la cataracte , & dont le mouvement étoit oblique & inutile , demeurait en repos : ainsi dans cette Proposition , afin que l'obliquité des mouvemens soit ôtée , & que les parties de l'eau cedant très-facilement , par un mouvement direct & très-prompt , prêtent un passage très-facile au cylindre , & qu'il ne reste que la résistance qui vient de la grandeur de la section transversale , laquelle on ne peut diminuer qu'en diminuant le diamètre du cylindre , il faut supposer que les parties du fluide , dont les mouvemens sont obliques & inutiles , & qui causent de la résistance , soient en repos entr'elles à chaque bout du cylindre , qu'elles coherent entr'elles , & qu'elles joignent le cylindre.

Fig. 48.

Soient, *ABCD* un rectangle, *AE* & *BE* deux arcs paraboliques ayant pour axe *AB* , & pour paramètre une ligne qui soit à l'espace *HG* , que le cylindre doit parcourir en tombant , pendant qu'il acquiert sa vitesse , comme *HG* à $\frac{1}{2}AB$. Soient aussi *CF* & *DF* deux autres arcs paraboliques , ayant pour axe *CD* , & un paramètre quadruple du précédent; la circonvolution de la figure autour de l'axe *EF* produira un solide , dont la partie du milieu *ABCD* sera le cylindre dont nous parlons , & les extrémités *ABE* & *CDF* renfermeront des parties du fluide qui seront en repos entr'elles.

tr'elles , & qui s'étant durcies formeront deux corps solides qui seront adhérens aux deux bouts du cylindre comme une tête & une queue. Et la résistance du solide $EACFDB$, qui s'avance vers E dans le sens de son axe FE , fera à peu près celle dont nous avons parlé dans cette Prop. c'est-à-dire , qu'elle aura à la force par laquelle tout le mouvement du cylindre peut-être détruit ou produit , pendant le temps qu'il emploie à parcourir la longueur $4 AC$ d'un mouvement uniformément continué , la même raison à peu près , qu'à la densité du fluide à la densité du cylindre. Et par cette force la résistance ne peut pas être moindre que dans la raison de 2 à 3 par le Cor. 7. de la Prop. 36.

L E M M E V.

Si un cylindre , une sphere & un sphéroïde , dont les largeurs sont égales , sont placés successivement dans le milieu d'un canal cylindrique de façon que leurs axes coïncident avec l'axe du canal : ces corps s'opposeront également à l'écoulement de l'eau par le canal.

Car les espaces entre le canal & le cylindre , la sphere & le sphéroïde , par lesquels espaces l'eau passe , sont égaux : & l'eau passe également par des espaces égaux.

Cela est ainsi en supposant que toute l'eau , dont la fluidité n'est pas nécessaire pour que l'eau passe très-vîte se gèle au-dessus du cylindre , de la sphere & du sphéroïde , comme je l'ai expliqué dans le Cor. 7. de la Prop. 36.

L E M M E V I.

Les mêmes choses étant posées , les corps dont on vient de parler sont pressés également par l'eau qui s'écoule par le canal.

C'est ce qui est clair , par le Lemme 5. & par la troisième loi du mouvement , car l'eau & ces corps agissent mutuellement & également l'un sur l'autre.

L E M M E V I I.

Si l'eau est en repos dans le canal, & que ces corps se meuvent avec une vitesse égale dans le canal vers des côtés opposés, leurs résistances seront égales entr'elles.

C'est ce qui est clair par le Lemme précédent, car les mouvemens relatifs demeurent les mêmes entr'eux.

S C H O L I E.

Il en est de même de tous les corps convexes & ronds dont les axes coïncident avec l'axe du canal. Il peut se trouver quelque différence par le plus ou le moins de frottement ; mais nous avons supposé dans ces Lemmes que les corps étoient parfaitement polis, que la ténacité, & les frottemens du milieu étoient nuls, & que les parties du fluide, qui par leurs mouvemens obliques & inutiles peuvent troubler, retarder & empêcher l'écoulement de l'eau par le canal, étoient en repos entr'elles, comme si elles étoient durcies par la gelée, & qu'elles étoient attachées aux corps par leurs parties antérieures & postérieures, comme je l'ai fait voir dans le scholie de la Proposition précédente. Dans les Propositions suivantes on traite de la moindre résistance que peuvent éprouver les solides de circonvolution dont les plus grandes sections sont données. Les corps qui nagent dans des fluides, lorsqu'ils se meuvent en ligne droite, font que le fluide s'élève vers leurs parties antérieures, & s'abaisse vers les postérieures, surtout si leurs formes sont obtuses ; & que par là ils éprouvent une résistance un peu plus grande que si la forme de leurs parties antérieures & postérieures étoit aigue. Et les corps mis dans des fluides élastiques, s'ils sont obtus par leurs extrémités, condensent un peu plus le fluide vers leurs parties antérieures, & le dilatent un peu plus vers les postérieures ; & par conséquent, ils éprouvent une résistance un peu plus grande

que s'ils étoient aigus par leurs extrémités. Dans ces Lemmes, & dans ces Propositions nous ne parlons pas des fluides élastiques, mais seulement de ceux qui ne le sont pas ; nous ne parlons pas non plus des corps qui nagent sur les fluides, mais de ceux qui y sont plongés entièrement. Et lorsqu'on connoît la résistance que ces corps éprouvent dans les fluides non élastiques, il suffira d'augmenter un peu cette résistance, tant dans les fluides élastiques comme dans l'air, par exemple, que dans les superficies des eaux stagnantes comme les marais & les mers.

PROPOSITION XXXVIII. THÉORÈME XXX.

La résistance d'un globe qui avance uniformément dans un milieu infini, comprimé & non élastique, est à la force par laquelle tout son mouvement peut être détruit ou produit, pendant le temps qu'il emploie à parcourir les $\frac{3}{4}$ parties de son diamètre, comme la densité du fluide est à la densité du globe à peu près.

Car le globe est au cylindre circonscript comme 2 est à 3 ; & par conséquent, la force qui peut détruire tout le mouvement du cylindre, pendant qu'il parcourt la longueur de 4 de ses diamètres, détruira tout le mouvement du globe pendant qu'il parcourra les deux tiers de cette longueur, c'est-à-dire, $\frac{3}{4}$ parties de son propre diamètre. Et la résistance du cylindre est à cette force, à peu près, comme la densité du fluide est à la densité du cylindre ou du globe, par les Lemmes 5, 6 & 7. C. Q. F. D.

Cor. 1. Les résistances des globes dans des milieux infinis & comprimés, sont en raison composée de la raison doublée de la vitesse, de la raison doublée des diamètres, & de la raison de la densité des milieux.

Cor. 2. La plus grande vitesse avec laquelle un globe, par la force de son poids comparatif, peut descendre dans un milieu résistant, est celle que ce même globe peut acquérir par le même poids, lorsqu'il tombe sans éprouver de résistance, & qu'il parcourt dans sa chute un espace qui est aux $\frac{3}{4}$ de son diamètre,

comme la densité du globe est à la densité du fluide. Car le globe, dans le temps qu'il a employé à tomber, & par la vitesse qu'il aura acquise en tombant, décrira un espace qui fera aux $\frac{3}{8}$ parties de son diamètre comme la densité du globe à la densité du fluide; & la force du poids qui produit ce mouvement sera à la force qui pourroit le produire dans le temps que le globe parcoureroit les $\frac{3}{8}$ parties de son diamètre avec la même vitesse, comme la densité du fluide est à la densité du globe. Donc, par cette Proposition, la force du poids sera égale à la résistance, & par conséquent elle ne peut accélérer le globe.

Cor. 3. La densité du globe & sa vitesse au commencement du mouvement étant données, ainsi que la densité du fluide comprimé & en repos, dans lequel le globe se meut; on a, pour un temps quelconque, la vitesse du globe, sa résistance & l'espace qu'il décrit, par le Cor. 7. de la Prop. 35.

Cor. 4. Un globe qui se meut dans un fluide comprimé en repos, & de la même densité que lui, a plutôt perdu la moitié de son mouvement qu'il n'auroit décrit la longueur de deux de ses diamètres, par le même Cor. 7. de la Prop. 35.

PROPOSITION XXXIX. THÉORÈME XXXI.

La résistance d'un globe qui avance uniformément dans un fluide renfermé & comprimé dans un canal cylindrique, est à la force, par laquelle tout son mouvement peut être produit ou détruit, dans le temps pendant lequel il parcourt $\frac{3}{8}$ parties de son diamètre, dans une raison composée de la raison de l'orifice du canal à l'excès de cet orifice sur la moitié du grand cercle du globe, de la raison doublée de l'orifice du canal à l'excès de cet orifice sur le grand cercle du globe, & de la raison de la densité du fluide à la densité du globe à peu près.

Cette Proposition est claire par le Cor. 2. de la Prop. 37. &

la démonstration est du même genre que celle de la Prop. précédente.

S C H O L I E.

Dans les deux dernières Propositions (comme dans le Lemme 5.) j'ai regardé comme gelée toute l'eau qui précède le globe & dont la fluidité augmente la résistance qu'il éprouve. Si toute cette eau venoit à se fondre, la résistance seroit un peu augmentée. Mais cette augmentation seroit très-peu de chose dans ces Propositions & l'on peut la négliger, parce que la superficie convexe du globe fait presque le même effet que la glace.

PROPOSITION XL. PROBLÈME IX.

Trouver par les phénomènes la résistance d'un globe qui se meut dans un milieu comprimé & très-fluide.

Soit A le poids du globe dans le vuide, B son poids dans un milieu résistant, D son diamètre, F l'espace qui est à $\frac{1}{4} D$ comme la densité du globe est à la densité du milieu, c'est-à-dire, comme A est à $A - B$; que G soit le temps dans lequel le globe tombant par son poids B , sans trouver de résistance, parcourt l'espace F , & que H soit la vitesse que ce globe a acquise dans sa chute. La vitesse H sera la plus grande vitesse avec laquelle le globe peut descendre par son poids B dans un milieu résistant, par le Cor. 2. de la Prop. 38. & la résistance que le globe éprouve, en descendant avec cette vitesse, sera égale à son poids B : mais la résistance qu'il éprouve avec une autre vitesse quelconque sera au poids B en raison doublée de cette vitesse à la plus grande vitesse H , par le Cor. 1. de la Prop. 38.

C'est là la résistance qui vient de l'inertie de la matière du fluide. Mais celle qui vient de l'élasticité, de la ténacité, & du frottement de ses parties, se trouve de cette manière.

Soit un globe abandonné à lui-même en sorte qu'il tombe par son poids B dans le fluide, & soit P le temps qu'il emploie à

tomber, exprimé en secondes, supposant de même le temps G exprimé en secondes. Soit trouvé le nombre N qui répond au logarithme $0,4342944819 \frac{2P}{G}$, & soit L le logarithme du nombre $\frac{N+1}{N}$: la vitesse acquise en tombant sera $\frac{N-1}{N+1}H$, mais la hauteur décrite sera $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611 F + 4,605170186 LF$. Si le fluide est assez profond, on peut négliger le terme $4,605170186 LF$; & on aura $\frac{2PF}{G} - 1,3862943611 F$ pour la hauteur décrite à peu près. Tout cela est clair, par la Prop. 9. du Livre second & ses corollaires, en supposant que le globe n'éprouve aucune autre espèce de résistance que celle qui vient de l'inertie de la matière. Car s'il éprouvoit quelqu'autre résistance, il descendrait plus lentement, & par la retardation on connoîtroit la quantité de cette résistance.

Afin de connoître plus facilement la vitesse & la chute du corps qui tombe dans un fluide, j'ai dressé la table suivante, dont la première colonne représente les temps de la chute; la seconde, les vitesses acquises en tombant, la plus grande vitesse étant 100000000; la troisième, l'espace parcouru en tombant pendant ces temps, $2F$ étant l'espace que le corps parcourt dans le temps G avec la plus grande vitesse, & la quatrième, les espaces parcourus dans les mêmes temps avec cette plus grande vitesse. Les nombres dans la quatrième colonne sont $\frac{2P}{G}$, & en soustrayant le nombre $1,3862944-4,6051702 L$, on aura les nombres de la troisième colonne, & il faudra multiplier ces nombres par l'espace F afin d'avoir les espaces parcourus en tombant.

J'ai ajouté une cinquième colonne aux quatre premières, laquelle contient les espaces parcourus par le corps, dans ces mêmes temps, lorsqu'il tomboit dans le vuide par la force de son poids comparatif B .

Temps. P	Vitesse du corps tomant dans le fluide.	Espaces parcourus en tombant dans le fluide.	Espaces par- cours par le plus grand mouvement.	Espaces parcourus en tombant dans le vuide.
0,001 G	99999 ²⁹ / ₃₀	0,000001 F	0,002 F	0,000001 F
0,01 G	999967	0,0001 F	0,02 F	0,0001 F
0,1 G	9966799	0,0099834 F	0,2 F	0,01 F
0,2 G	19737532	0,0397361 F	0,4 F	0,04 F
0,3 G	29131261	0,0886815 F	0,6 F	0,09 F
0,4 G	37994896	0,1559070 F	0,8 F	0,26 F
0,5 G	46211716	0,2402290 F	1,0 F	0,35 F
0,6 G	53704957	0,3402706 F	1,2 F	0,49 F
0,7 G	60436778	0,4545405 F	1,4 F	0,64 F
0,8 G	66403677	0,5815071 F	1,6 F	0,81 F
0,9 G	71629787	0,7196609 F	1,8 F	1 F
1 G	76159416	0,8675617 F	2 F	4 F
2 G	96402758	2,6500055 F	4 F	9 F
3 G	99505475	4,6186570 F	6 F	16 F
4 G	99932930	6,6143765 F	8 F	25 F
5 G	99990920	8,6137964 F	10 F	36 F
6 G	99998771	10,6137179 F	12 F	49 F
7 G	99999834	12,6137073 F	14 F	64 F
8 G	99999980	14,6137059 F	16 F	81 F
9 G	99999997	16,6137057 F	18 F	100 F
10 G	99999999 ¹ / ₁₀	18,6137056 F	20 F	

S C H O L I E.

Afin de pouvoir trouver par expérience les résistances des fluides, je fis un vaisseau de bois qui étoit quarré, & qui avoit de dedans en dedans 9 pouces de Londres de longueur & de largeur, & 9 $\frac{1}{2}$ pieds de profondeur, je l'emplis d'eau de pluie; & ayant fait des globes de cire qui renfermoient du plomb au centre, je marquai les temps que ces globes mirent à tomber de la hauteur de 112 pouces. Le pied cube de Londres pèse 76 livres romaines d'eau de pluie, & un pouce cube de ce même pied pèse $\frac{12}{32}$ onces de cette livre ou 253 $\frac{1}{2}$ grains; & un globe d'eau d'un pouce de diamètre pèse 132, 645 grains dans l'air, ou 132, 8 grains dans le vuide; & un autre globe quelconque est comme l'excès de son poids dans le vuide sur son poids dans l'eau.

Expérience 1. Un globe, dont le poids étoit de $156\frac{1}{4}$ grains dans l'air, & de 77 dans l'eau employa 4 secondes à tomber de la hauteur de 112 pouces. Et ayant répété la même expérience, le résultat fut le même.

Le poids de ce globe dans le vuide étoit de $156\frac{13}{38}$ grains, & l'excès de ce poids sur le poids du globe dans l'eau est de $79\frac{13}{38}$ grains, d'où l'on tirera le diamètre du globe de 0, 84224 parties de pouces. Mais cet excès est au poids du globe dans le vuide, comme la densité de l'eau est à la densité du globe; & les $\frac{3}{8}$ parties du diamètre du globe (c'est-à-dire, 2, 24597 pouces) sont à l'espace 2 *F*, qui sera par conséquent de 4, 4256 pouces dans la même raison. Le globe, dans le temps d'une seconde, parcourt $193\frac{1}{3}$ pouces, en tombant dans le vuide par la force de tout son poids, qui est de $156\frac{13}{38}$ grains, & par son poids, qui est dans l'eau de 77 grains, il parcourt dans l'eau dans le même temps lorsqu'il y tombe sans éprouver de résistance 95, 219 pouces; & dans le temps *G*, qui est à une seconde en raison sousdoublée de l'espace *F*, ou comme 2, 2128 pouces sont à 95, 219 pouces, il parcourra 2, 2128 pouces, & il acquerra la vitesse *H*, qui est la plus grande avec laquelle il puisse descendre dans l'eau. Or le temps *G* est 0'', 15244. Et dans ce temps *G*, avec cette plus grande vitesse *H*, le globe parcourra l'espace 2 *F* qui est de 4, 4256 pouces; donc en 4 secondes il parcourra un espace de 116, 1245 pouces. Et en soustrayant l'espace 1, 3862944 *F*, ou 3, 0676 pouces, il restera l'espace 113, 0569 pouces que le globe parcourra en tombant dans l'eau dans un très-grand vase pendant 4 secondes. Cet espace, à cause du peu de largeur du vaisseau de bois dont j'ai parlé, doit être diminué en une raison composée de la raison sousdoublée de l'orifice du vase à l'excès de cet orifice sur la moitié du grand cercle du globe, & de la raison simple de ce même orifice à son excès sur le grand cercle du globe, c'est-à-dire, dans la raison de 1 à 0, 9914. Ce qui étant fait on aura l'espace de 112, 08 pouces que le globe auroit dû parcourir à peu près, par la théorie,

rie, en 4 secondes, en tombant dans ce vase de bois lorsqu'il étoit plein d'eau & il en parcourut 112 dans l'expérience.

Exper. 2. Trois globes égaux, dont le poids de chacun étoit de $76\frac{1}{2}$ grains dans l'air, & de $5\frac{1}{16}$ grains dans l'eau, étant abandonnés à eux-mêmes dans l'eau, l'un après l'autre, parcoururent dans leur chute 112 pouces en 15 secondes.

En faisant le calcul, on trouve le poids de chacun de ces globes dans le vuide de $76\frac{1}{12}$ grains, l'excès de ce poids sur le poids dans l'eau de $71\frac{17}{48}$ grains, le diamètre de ces globes de 0, 81296 pouces, les $\frac{2}{3}$ parties de ce diamètre de 2, 16789 pouces, l'espace $2F$ de 2, 3217 pouces, l'espace que le corps parcourut en tombant, sans éprouver de résistance, dans le temps de 1" par son poids qui étoit de $5\frac{1}{16}$ grains, de 12, 808 pouces, & le temps G de 0", 301056. Donc le globe, par la plus grande vitesse avec laquelle il puisse descendre dans l'eau par la force de son poids qui étoit de $5\frac{1}{16}$ grains dans le temps de 0", 301056 parcourera un espace de 2, 3217 pouces, & dans le temps de 15" il parcourra un espace de 115, 678 pouces, & en soustrayant l'espace 1, 3862944 F , ou 1, 609 pouces, il restera l'espace 114, 069 pouces que le globe devoit parcourir en tombant dans le même temps dans un plus grand vaisseau. Car il faut ôter, à cause du peu de largeur de notre vaisseau, un espace de 0, 895 pouces environ. Ainsi il restera un espace de 113, 174 pouces que le globe devoit parcourir à peu près par la théorie en tombant dans ce vase pendant le temps de 15". Or il en parcourut 112 dans l'expérience, ainsi la différence est insensible.

Exper. 3. Trois globes égaux dont le poids de chacun étoit de 121 grains dans l'air, & d'un grain dans l'eau, étant abandonnés successivement à eux-mêmes, parcoururent en tombant dans l'eau 112 pouces dans les temps de 46", 47" & 50".

Par la théorie, ces globes devoient parcourir cette hauteur en 40" environ. Pourquoi donc tomberent-ils plus lentement? Peut-être faut-il l'attribuer à ce que dans les mouvemens lents, la

proportion de la résistance qui vient de la force d'inertie, à la résistance qui vient des autres causes est moindre, peut-être aussi cela doit-il être plutôt attribué à quelques petites bulles qui s'attachent au globe, ou à la raréfaction de la cire, causée, ou par la chaleur de la main qui jettoit le globe, ou par celle de l'air, ou enfin à quelques erreurs insensibles commises en pesant ces globes dans l'eau, je ne sçai à laquelle de ces causes m'arrêter. Ainsi je conclus de cette expérience, qu'il faut que les globes dont on se sert dans ces expériences pèsent plus d'un grain dans l'eau pour les rendre certaines & qu'on puisse y ajouter foi.

Exper. 4. J'entrepris les expériences que je viens de décrire pour découvrir les résistances des fluides, avant d'avoir la théorie que j'ai exposée dans les Prop. précédentes. Ensuite, pour examiner cette théorie, je fis un vaisseau de bois de $8\frac{2}{3}$ pouces de large de dedans en dedans : & de 15 pieds $\frac{1}{2}$ de profondeur. Ensuite, je fis quatre globes composés de cire & de plomb renfermé dans le centre, le poids de chacun de ces globes étoit de $139\frac{1}{4}$ grains dans l'air, & de $7\frac{1}{2}$ grains dans l'eau. Je les laissai tomber de sorte que je pouvois remarquer, par le moyen d'un pendule qui battoit les demi secondes, les temps qu'ils employoient à tomber dans l'eau. Lorsque je pesai ces globes, & que je les fis tomber, j'avois eu soin qu'ils fussent froids depuis quelque temps; parce que la chaleur raréfie la cire, & que cette raréfaction diminue son poids dans l'eau, & que de plus la cire que la chaleur a raréfiée ne retourne pas dans le moment qu'elle est refroidie à sa première densité. Ces globes étoient entièrement plongés dans l'eau avant de tomber; de peur que le poids de la partie qui n'auroit pas été plongée n'eût accéléré leur chute dans le premier instant. Et lorsqu'ils étoient entièrement plongés & en repos, je les laissois tomber avec bien de la précaution, de peur que ma main ne leur donnât quelque impulsion. Ils tombèrent successivement en $47\frac{1}{2}$, $48\frac{1}{2}$, 50 & 51 oscillations, & parcoururent en tombant 15 pieds & 2 pouces. Le temps étant alors un peu plus

froid que lorsque j'avois pesé les globes, je répétois l'expérience un autre jour, & ils tombèrent en 49, $49\frac{1}{2}$, 50 & 53 oscillations. Et un troisième jour ils tombèrent en $49\frac{1}{2}$, 50, 51 & 53 oscillations. Et enfin, ayant répété très-souvent cette expérience, les globes tombèrent le plus ordinairement en $49\frac{1}{2}$ & 50 oscillations. Et quand ils employèrent plus de temps, je soupçonne qu'ils étoient retardés parce qu'ils frottoient contre les parois du vase.

En faisant le calcul par la théorie, on trouve que le poids du globe dans le vuide est de $139\frac{2}{3}$ grains. L'excès de ce poids sur le poids dans l'eau de $132\frac{11}{16}$ grains. Le diamètre du globe de 0, 99868 pouces. Les $\frac{2}{3}$ de son diamètre de 2, 66315 pouces. L'espace 2 *F* de 2, 8066 pouces. L'espace que le globe qui pèse 7 $\frac{1}{8}$ grains parcouroit en tombant dans une seconde sans éprouver de résistance de 9, 88164 pouces. Et le temps *G* de 0" 376843. Donc le globe, avec la plus grande vitesse avec laquelle il puisse tomber dans l'eau par la force du poids de 7 $\frac{1}{8}$ grains, dans le temps de 0", 376843, parcourt un espace de 2, 8066 pouces, & dans le temps de 1" un espace de 7, 44766 pouces, & dans le temps de 25" ou de 50 oscillations, il parcourt un espace de 186, 1915 pouces. Soustrayant l'espace 1, 386294 *F*, ou 1, 9454 pouces, il restera l'espace 184, 2461 pouces que le globe décrirait dans le même temps dans un vase très-large. A cause du peu de largeur de celui dont je me suis servi, il faut donc diminuer cet espace en raison composée de la raison soussoublée de l'orifice du vase à l'excès de cet orifice sur la moitié du grand cercle du globe, & de la raison simple de ce même orifice à son excès sur le grand cercle du globe; & on aura l'espace 181, 86 pouces, que le globe auroit du parcourir, à peu près, dans ce vase selon la théorie pendant 50 oscillations. Et il parcourut 182 pouces à peu près dans $49\frac{1}{2}$ ou 50 oscillations.

Exper. 5. Quatre globes du poids de $154\frac{3}{8}$ grains chacun dans l'air, & de $21\frac{1}{2}$ grains dans l'eau, ayant été jettés plusieurs fois,omboient dans le temps de $28\frac{1}{2}$, 29, $29\frac{1}{2}$ & 30 oscillations, & quelquefois en 31, 32 & 33 oscillations, & ils parcouroient en tombant 15 pieds 2 pouces.

Par la théorie ils devoient parcourir cette hauteur en 29 oscillations à peu près.

Exper. 6. Cinq globes du poids de $212\frac{3}{8}$ grains dans l'air, & de $79\frac{1}{2}$ grains dans l'eau ayant été jettés plusieurs fois tomboient en 15, $15\frac{1}{2}$, 16, 17 & 18 oscillations d'une hauteur de 15 pieds & 2 pouces.

Par la théorie ils devoient tomber en 15 oscillations à peu près.

Exper. 7. Quatre globes qui pésoient $293\frac{1}{8}$ grains dans l'air, & $35\frac{7}{8}$ grains dans l'eau ayant été jettés plusieurs fois tomboient en $29\frac{1}{2}$, 30, $30\frac{1}{2}$, 31, 32 & 33 oscillations, & parcouroient un espace de 15 pieds un pouce & demi.

Par la théorie ils auroient dû tomber en 28 oscillations à peu près.

En cherchant la cause pourquoi, de plusieurs globes égaux en poids & en grandeur, les uns tomboient plus vite, & les autres plus lentement, j'ai trouvé celle-ci; que ces globes, dans le premier moment qu'ils étoient abandonnés à eux-mêmes & qu'ils commençoient à tomber, oscilloient autour de leurs centres, parce que celui de leurs côtés qui étoit peut-être un peu plus pesant descendoit le premier & caufoit un mouvement oscillatoire. Car le globe doit communiquer une plus grande quantité de son mouvement à l'eau par ces oscillations, que s'il descendoit sans osciller; & en communiquant ce mouvement à l'eau, il perd une partie du mouvement propre qui doit le faire descendre: & il doit être par conséquent plus ou moins retardé selon qu'il fera de plus grandes ou de plus petites oscillations. De plus, le globe s'éloigne toujours du côté qui lui a fait commencer ses oscillations, & en s'éloignant, il s'approche des parois du vase, & peut quelquefois frotter contr'eux. Cette oscillation est plus forte dans les globes plus péfants, & les plus grands globes communiquent plus de mouvement à l'eau. C'est pourquoi, afin de diminuer ces oscillations, je fis de nouveaux globes composés de même de cire & de plomb, & je mis du plomb à un côté du globe près

de la superficie, & je laissai ensuite tomber ce globe de sorte que le côté le plus pèsant étoit le plus bas, autant qu'il étoit possible, quand le corps commença à descendre. De cette sorte, les oscillations étoient beaucoup plus petites qu'auparavant, & les globes tombèrent en des temps bien moins inégaux comme dans les expériences suivantes.

Exper. 8. Quatre globes qui pésoient chacun 139 grains dans l'air, & $6\frac{1}{2}$ grains dans l'eau, ayant été abandonnés à eux-mêmes plusieurs fois, tombèrent dans des oscillations dont le nombre ne passa pas 52, & ne fut pas au-dessous de 50, & le plus souvent, ils tombèrent en 51 oscillations à peu près, & parcoururent 182 pouces.

Par la théorie, ils devoient tomber en 52 oscillations environ.

Exper. 9. Ayant fait la même expérience plusieurs fois sur quatre globes qui pésoient $273\frac{3}{4}$ grains dans l'air, & $140\frac{5}{4}$ dans l'eau, ils tombèrent dans des oscillations dont le nombre ne passa pas 13 & n'alla pas au-dessous de 12 & ils parcoururent un espace de 182 pouces.

Par la théorie, ces globes devoient tomber en $11\frac{7}{8}$ oscillations à peu près.

Exper. 10. La même expérience ayant été faite plusieurs fois sur quatre globes qui pésoient 384 grains dans l'air, & $119\frac{1}{2}$ dans l'eau, ils emploierent à tomber les temps de $17\frac{3}{4}$, 18, $18\frac{1}{2}$ & 19 oscillations, & ils parcoururent 181 pouces $\frac{1}{2}$. Lorsqu'ils mirent 19 oscillations à tomber, j'entendis quelquefois les coups qu'ils donnoient contre les parois du vase avant de parvenir au fond.

Par la théorie, ils auroient dû tomber en 15 oscillations $\frac{5}{8}$ à peu près.

Exper. 11. Ayant laissé tomber plusieurs fois trois globes égaux qui pésoient 48 grains dans l'air, & $3\frac{29}{32}$ dans l'eau, ils mirent $43\frac{1}{2}$, 44, $44\frac{1}{2}$, 45 & 46 oscillations à tomber, & le plus souvent ilsomboient en 44 & 45 oscillations, & parcouroient un espace de $182\frac{1}{2}$ pouces environ.

Ils devoient tomber par la théorie en $46\frac{1}{2}$ oscillations à peu près.

Exper. 12. Je fis tomber plusieurs fois trois globes égaux qui pesoient 141 grains dans l'air, & $4\frac{3}{8}$ grains dans l'eau, & ils parcoururent 182 pouces en 61, 62, 63, 64 & 65 oscillations.

Par la théorie, ils devoient tomber en $64\frac{1}{2}$ oscillations à peu près.

Il est clair par ces expériences, que lorsque ces globes tomboient lentement comme dans les expériences 2, 4, 5, 8, 11 & 12, les temps de leurs chutes s'accordoient assez avec les temps que donne la théorie, mais que lorsqu'ils tomboient plus vite, comme dans les expériences 6, 9 & 10, la résistance qu'ils éprouvoient étoit un peu plus grande que dans la raison doublée des vitesses. Car ces globes oscilloient un peu en tombant : & ces oscillations cessent bientôt dans les globes légers, & qui tombent lentement à cause du peu de mouvement ; mais dans les globes plus grands & plus pesans, elles durent plus long-temps à cause que le mouvement a plus de force, & ce mouvement oscillatoire ne peut être arrêté par l'eau qui environne le globe qu'après que le corps a fait plusieurs oscillations. Il se peut encore faire que les globes soient moins pressés par le fluide vers leurs parties postérieures lorsqu'ils ont plus de vitesse ; & si on augmentoit continuellement la vitesse, ils laisseroient à la fin un espace vuide derrière eux, à moins qu'on n'augmentât en même temps la compression du fluide. Or (par les Prop. 32 & 33.) la compression du fluide doit augmenter en raison doublée de la vitesse, pour que la résistance soit dans cette même raison doublée. Mais comme cela n'arrive pas, les globes qui ont plus de vitesse sont un peu moins pressés par leurs parties postérieures, & le défaut de cette pression fait que la résistance qu'ils éprouvent est un peu plus grande que dans la raison doublée de la vitesse.

La théorie s'accorde donc avec les phénomènes des corps qui tombent dans l'eau, il nous reste à examiner ce qui arrive à ceux qui tombent dans l'air.

Exper. 13. Du haut de l'Eglise de S. Paul de Londres au mois de Juin 1710. on laissa tomber en même temps deux globes de verre, l'un plein de vif-argent, & l'autre plein d'air; & en tombant ils parcouroient 220 pieds de Londres. Une table de bois étoit suspendue par un de ses côtés par des pivots de fer, & par l'autre elle s'appuyoit sur un verrouil de bois; & les deux globes étant posés dessus tomboient en même temps, & en tirant le verrouil par le moyen d'un fil de fer, ils tomboient jusqu'à terre, & la table étant seulement soutenue par ces pivots, faisoit la bascule, & dans le même instant un pendule qui battoit les secondes, étant mis en mouvement par le fil de fer commençoit à osciller. Les diamètres & les poids des globes, ainsi que les temps de leurs chutes, étoient tels qu'ils sont marqués dans la table suivante.

<i>Globes pleins de mercure.</i>			<i>Globes pleins d'air.</i>		
<i>Poids.</i>	<i>Diamètres.</i>	<i>Temps de la chute.</i>	<i>Poids.</i>	<i>Diamètres.</i>	<i>Temps de la chute.</i>
908 grains.	0,8 pouces.	4"	510 grains.	5,1 pouces.	8" $\frac{1}{2}$
983	0,8	4—	642	5,2	8
866	0,8	4	599	5,1	8
747	0,75	4+	515	5,0	8 $\frac{1}{4}$
808	0,75	4	483	5,0	8 $\frac{1}{2}$
784	0,75	4+	641	5,2	8

Au reste, les temps des chutes que nous avons observés dans ces expériences doivent être corrigés. Car les globes pleins de mercure devoient parcourir en 4" (par la théorie de Galilée) 257 pieds de Londres, & ils n'en parcoururent que 220 en 3" $\frac{1}{2}$ ". Il falloit donc que la table de bois employât quelque temps à faire la bascule lorsqu'on tiroit le verrouil, & que par-là elle s'opposât au commencement à la chute des globes. Car ces globes étoient posés, à peu près, dans le milieu de cette table, & ils étoient un peu plus près de son axe que le verrouil, & par-là, le temps de la chute fut allongé de 18" environ; ce qui doit être corrigé en ôtant du temps de la chute ces 18", surtout pour

les plus grands globes qui demeuroident un peu plus longtemps sur la table quand elle se déployoit, à cause de la grandeur de leurs diamètres. Cette correction étant faite, les temps dans lesquels les six plus grands globes tombèrent, se trouvent de $8'' 12'''$, $7'' 42'''$, $7'' 57'''$, $8'' 12'''$, & $7'' 42'''$.

Le cinquième des globes pleins d'air avoit 5 pouces de diamètre, & pésoit 483 grains, & il tomba en $8'' 12'''$ & parcourut pendant ce temps 220 pieds. Le poids d'un globe d'eau égal à ce globe est de 16600 grains; & le poids d'une quantité d'air de même volume que ce globe est de $\frac{16600}{8600}$ grains ou de $19\frac{3}{10}$ grains. Donc le poids de ce globe dans le vuide étoit de $502\frac{3}{10}$ grains. Et ce poids est au poids d'un volume d'air égal à ce globe, comme $502\frac{3}{10}$ grains à $19\frac{3}{10}$. Or, 2 F sont à $\frac{8}{5}$ du diamètre de ce globe, c'est-à-dire, à $13\frac{1}{5}$ pouces dans cette raison. Donc 2 F deviennent 28 pieds 11 pouces. Ce globe en tombant dans le vuide, par la force de tout son poids qui étoit de $502\frac{3}{10}$ grains, parcourut, dans une seconde, $193\frac{1}{5}$ pouces, comme ci-dessus, & avec un poids de 483 grains il parcourut 185, 905 pouces, & avec le même poids de 483 grains il parcourut aussi dans le vuide l'espace F ou 14 pieds $5\frac{1}{2}$ pouces en $57'' 58'''$, & il acquit dans ce temps la plus grande vitesse avec laquelle il peut descendre dans l'air. Avec cette vitesse, ce globe en $8'' 12'''$ parcoureroit un espace de 245 pieds $5\frac{1}{5}$ pouces. En ôtant 1, 3863 F ou 20 pieds $0\frac{1}{2}$ pouces, il restera 225 pieds 5 pouces. Le globe en tombant devoit donc parcourir cet espace en $8'' 12'''$ par la théorie. Mais il parcourut 220 pieds dans l'expérience, ainsi la différence est insensible.

Ayant fait un calcul semblable au précédent pour les autres globes pleins d'air, j'ai dressé la table suivante.

<i>Poids des globes.</i>	<i>Diamètres.</i>	<i>Temps employés à parcourir 220 pieds en tombant.</i>	<i>Espaces qui devoient être parcourus selon la théorie.</i>	<i>Différences.</i>
510 grains.	5,1 pouc.	8 ⁿ 12 ^m	226 pieds 11 p.	6 p. 11 p.
642	5,2	7 42	230 9	10 9
599	5,1	7 42	227 10	7 10
515	5	7 57	224 5	4 5
483	5	8 12	225 5	5 5
641	5,2	7 42	230 7	10 7

LIVRE
SECOND.

Exp. 14. Au mois de Juillet 1719. le docteur *Desaguliers* recommença ces expériences en cette sorte. Il donna à des vessies de cochon une forme sphérique, en les plaçant dans des sphères de bois, car en soufflant de l'air dans ces vessies, après les avoir mouillées, il les forçoit d'emplir la concavité de ces sphères. Ensuite ayant séché ces vessies & ayant ôté le bois qui les entourait & qui pouvoit se démonter, il les laissa tomber d'un lieu qu'on avoit pratiqué dans le plus haut de la voute de la même Eglise en sorte que ces vessies tomboient alors de la hauteur de 272 pieds; & il laissa tomber dans le même instant un globe de plomb qui pèsoit environ deux livres romaines. Pendant ce temps il y avoit des personnes qui étoient placées au sommet du temple d'où on laissoit tomber ces globes, & qui marquoient les temps qui s'écouloient pendant les chutes, il y avoit d'autres personnes placées sur le pavé de l'Eglise qui marquoient la différence qui se trouvoit entre le temps de la chute de la vessie & celui de la chute du globe de plomb. Ces temps étoient mesurés par des oscillations de pendules qui battoient les demi-secondes. Un de ceux qui étoient en bas avoit un horloge à ressort qui battoit les quarts de seconde; un autre avoit une autre machine faite avec soin à laquelle étoit adapté un pendule qui battoit les quarts de seconde. Un de ceux qui étoient au haut de l'Eglise avoit une machine semblable. Ces instrumens étoient faits de sorte que leurs mouvemens commençoient & s'arrêtoient quand on vouloit. Le globe de plomb tomboit en 4. secondes. &

un quart à peu près. Et en ajoutant ce temps à la différence du temps dont on a parlé, on avoit le temps que la vessie employoit à tomber. Les temps dans lesquels cinq vessies tomberent, surpassèrent la première fois le temps de la chute du globe de plomb de $14\frac{3}{4}''$, $12\frac{3}{4}''$, $14\frac{5}{8}''$, $17\frac{3}{4}''$ & $16\frac{7}{8}''$, & la seconde fois de $14\frac{1}{2}''$, $14\frac{1}{4}''$, $14''$, $19''$ & $16\frac{3}{4}''$. Ajoutant $4\frac{1}{4}''$ qui est le temps que le globe de plomb employa à tomber, les temps entiers dans lesquels les cinq vessies tomberent étoient la première fois de $19''$, $17''$, $18\frac{7}{8}''$, $22''$ & $21\frac{1}{8}''$; & la seconde fois de $18\frac{3}{4}''$, $18\frac{1}{2}''$, $18\frac{1}{4}''$, $23\frac{1}{4}''$ & $21''$. Et les temps marqués par ceux qui étoient au haut de l'Eglise étoient la première fois de $19\frac{3}{8}''$, $17\frac{1}{4}''$, $18\frac{3}{4}''$, $22\frac{1}{8}''$ & $21\frac{1}{8}''$ & la seconde fois de $19''$, $18\frac{5}{8}''$, $18\frac{3}{8}''$, $24''$ & $21\frac{1}{4}''$. Au reste, les vessies ne tomboient pas toujours en ligne droite, & quelquefois elles voltigeoient & oscilloient de côté & d'autre en tombant ce qui prolongeoit les temps de leurs chutes quelquefois d'une demi-seconde, & quelquefois d'une seconde entiere. La seconde & la quatrième vessie tomberent plus droit la première fois; & la seconde fois ce furent la première & la quatrième. La cinquième vessie étoit ridée, & ses rides retardoient un peu sa chute. Je conclus les diamètres des vessies de leurs circonférences que je mesurois avec un fil dont je entourois. J'ai comparé la théorie avec les expériences dans les la table suivante, en supposant la densité de l'air à la densité de l'eau de pluie comme 1 à 860, & comptant les espaces que les globes devoient parcourir en tombant selon la théorie.

Poids des Vessies.	Diamètres.	Temps employés à tomber de la hauteur de 272 pieds.	Espaces qui devoient être parcourus pendant ces temps selon la théorie.	Différence entre la théorie & l'expérience.
128 grains.	5,28 pou.	19''	271 pieds 11 p.	-0 pieds 1 p.
156	5,19	17	272 $0\frac{1}{2}$	+0 $0\frac{1}{2}$
137 $\frac{1}{2}$	5,3	18 $\frac{1}{2}$	272 7	+0 7
97 $\frac{1}{2}$	5,26	22	277 4	+5 4
99 $\frac{1}{8}$	5	21 $\frac{1}{8}$	282 0	+10 0

Notre théorie déterminoit donc presque exactement toute la résistance qu'éprouvoient les globes mûs, tant dans l'eau que dans l'air, & cette résistance est proportionnelle (lorsque les vitesses des globes sont égales ainsi que leurs grandeurs) à la densité des fluides.

Dans le scholie qui suit la sixième section, j'ai fait voir par les expériences des pendules, que les globes égaux qui ont des vitesses égales éprouvent, lorsqu'ils se meuvent dans l'air, dans l'eau, & dans le vif-argent, des résistances qui sont comme les densités de ces fluides. Mais je l'ai fait voir ici plus exactement par les expériences des corps qui tombent dans l'air & dans l'eau; car les pendules à chaque oscillation excitent dans le fluide un mouvement qui est toujours contraire au retour du pendule, & la résistance qui vient de ce mouvement, ainsi que celle qui vient du fil auquel le pendule est suspendu, font qu'il éprouve une résistance plus grande que celle qu'ont donné les expériences des corps qui tombent. Car par les expériences des pendules qu'on a rapportées dans ce scholie, un globe de même densité que l'eau devoit perdre la $\frac{1}{3342}$ partie de son mouvement, en parcourant dans l'air la longueur de son demi diamètre. Mais par la théorie qu'on a exposée dans cette septième section, & qui est confirmée par les expériences des corps qui tombent, le même globe, en parcourant la même longueur, ne devoit perdre que la $\frac{1}{4188}$ partie de son mouvement, en supposant que la densité de l'eau soit à celle de l'air comme 860 à 1. Donc les résistances étoient plus grandes dans les expériences des pendules (par les causes dont on vient de parler) que dans les expériences des globes tombans, & cela en raison de 4 à 3 environ. Mais comme les résistances que les pendules qui oscillent dans l'air, dans l'eau & dans le vif-argent, éprouvent, sont augmentées de la même manière par des causes semblables, la proportion des résistances dans ces milieux est donnée assez exactement, tant par les expériences des pendules que par celles des corps qui tombent. Et on en peut conclure que les résistances qu'éprouvent les corps qui se meuvent dans des fluides quel-

conques très-subtils, sont (toutes choses égales) comme les densités de ces fluides.

Ces choses étant ainsi posées, on peut déterminer à-présent quelle partie de son mouvement un globe quelconque jetté dans un fluide quelconque perdra à peu près dans un temps donné. Soit D le diamètre du globe, V la vitesse dans le commencement du mouvement, & T le temps dans lequel le globe décrira dans le vuide avec la vitesse V un espace, qui soit à l'espace $\frac{8}{3} D$ comme la densité du globe est à la densité du fluide : & ce globe, étant jetté dans ce fluide, perdra dans un autre temps quelconque t la partie $\frac{tV}{T+t}$ de la vitesse, & il conservera la partie $\frac{TV}{T+t}$ & décrira un espace qui sera à l'espace qu'il parcoureroit dans le vuide, dans le même temps, avec la vitesse V supposée uniforme, comme le logarithme du nombre $\frac{T+t}{T}$ multiplié par le nombre 2, 302585093 est au nombre $\frac{t}{T}$, par le Cor. 7. de la Prop. 35.

Dans les mouvemens lents la résistance peut être un peu moindre à cause que la figure d'un globe est un peu plus propre au mouvement que celle d'un cylindre décrit sur le même diamètre. Et dans les mouvemens plus prompts la résistance peut être un peu plus grande à cause que l'élasticité & la compression du fluide n'augmentent pas en raison doublée de la vitesse. Mais je ne fais pas attention ici à ces minuties.

Quand même l'air, l'eau, le vif-argent & d'autres fluides semblables seroient subtilisés à l'infini, & qu'ils composeroient des milieux infiniment fluides, ils n'en résisteroient pas moins aux globes projetés. Car la résistance dont on a parlé dans les Prop. précédentes vient de l'inertie de la matiere; & l'inertie est essentielle aux corps, & est toujours proportionnelle à leur quantité de matiere. On peut à la vérité diminuer, par la division des parties du fluide, la résistance qui vient de la tenacité & du frotte-

ment des parties ; mais cette division des parties de la matiere ne diminue point sa quantité ; & la quantité de la matiere restant la même , la force d'inertie reste la même ; & la résistance dont on a parlé ici est toujours proportionnelle à la force d'inertie. Afin que cette résistance diminue , il faut donc diminuer la quantité de matiere dans les espaces dans lesquels le corps se meut. C'est pourquoi les espaces célestes dans lesquels les globes des planettes & des comettes se meuvent sans cesse librement en tout sens sans aucune diminution sensible de leur mouvement doivent être vuides de tout fluide corporel , si on en excepte peut-être quelques vapeurs très-légères & les rayons de lumiere qui les traversent.

Les projectiles excitent donc du mouvement dans les fluides , lorsqu'ils s'y meuvent , & ce mouvement vient de l'excès de la pression du fluide sur les parties antérieures du projectile sur la pression que ses parties postérieures éprouvent , & il ne peut pas être moindre dans les milieux infiniment fluides que dans l'air , l'eau & le vif-argent , à raison de la quantité de matiere que chacun contient. Mais cet excès de la pression n'excite pas seulement , à raison de sa quantité , un mouvement dans le fluide , il agit encore sur le projectile pour retarder son mouvement , & par conséquent la résistance dans tout fluide est comme le mouvement excité dans ce fluide par le projectile , & elle ne peut pas être moindre dans un milieu rempli de matiere éthérée à raison de sa densité , que dans l'air , dans l'eau & dans le vif-argent à raison de la densité de ces fluides.

HUITIÈME SECTION.

De la propagation du mouvement dans les fluides.

PROPOSITION XLI. THÉORÈME XXXII.

La pression ne se propage point en ligne droite dans un fluide , à moins que ses parties ne soient placées en ligne droite.

Fig. 49.

Si les particules a, b, c, d, e sont placées en ligne droite , la pression peut se propager directement de a à e ; mais la particule e pressera obliquement les particules f & g placées obliquement , & ces particules f & g ne soutiendront point cette pression à moins qu'elles ne soient soutenues par les particules plus éloignées h & k ; or en étant soutenues , elles les pressent , & ces particules h & k ne peuvent pas soutenir cette pression , si elles ne sont soutenues elles-mêmes par les particules ultérieures l & m qu'elles pressent à leur tour , & ainsi de suite à l'infini. Donc la pression qui s'est ainsi communiquée , premièrement aux particules qui n'étoient pas posées en ligne droite produira une déviation , & elle se propagera obliquement à l'infini : après avoir commencé à se propager obliquement elle continuera encore sa déviation , si elle tombe sur des particules ultérieures qui ne soient pas posées en ligne droite ; & cela autant de fois qu'elle rencontrera des particules qui ne seront pas placées exactement en ligne droite. *C. Q. F. D.*

Cor. Si quelque partie de la pression , propagée dans un fluide d'un point donné , est interceptée , la partie restante , qui n'est point interceptée agira derrière l'obstacle. Ce qui peut se démontrer ainsi.

Que la pression soit propagée du point A vers tous les côtés , & ce-

la, s'il est possible, selon des lignes droites, & que l'obstacle $NBCK$ percé en BC intercepte toute cette pression qui passe par le trou circulaire BC , excepté la partie APQ qui passe par le trou conique. Que le cône APQ soit partagé en tranches par les plans transversaux de , fg , hi ; & que pendant que le cône ABC , en propageant la pression, presse dans la superficie de la tranche conique ultérieure $degf$, & que cette tranche presse la tranche voisine $fghi$ dans la superficie fg , & que cette seconde tranche en presse une troisième, & ainsi de suite à l'infini. Il est clair (par la troisième loi du mouvement) que la première tranche $degf$ sera autant pressée dans la superficie fg par la réaction de la seconde tranche $fghi$, qu'elle presse elle-même cette seconde tranche. Donc la tranche $degf$ est pressée des deux côtés entre le cône Ade & la tranche fhi , & par conséquent (par le Cor 6. de la Prop. 19.) elle ne peut conserver sa figure à moins qu'elle ne soit pressée de tous côtés par une force égale : donc elle sera forcée de céder vers les côtés df , eg par le même effort par lequel elle presse les superficies de , fg ; & comme elle n'est point solide mais entièrement fluide elle se répandra alors à moins qu'il n'y ait un fluide ambiant qui s'oppose à son effort. Donc par l'effort qu'elle fait pour se répandre, elle pressera d'un même effort, tant le fluide ambiant vers les côtés df , eg , que la tranche $fghi$; & par conséquent la pression ne se propagera pas moins vers les côtés df , eg , dans les espaces NO , KL à droite & à gauche, que de la superficie fg vers PQ . $C. Q. F. D.$

PROPOSITION XLII. THÉORÈME XXXIII.

Tout mouvement propagé dans un fluide s'éloigne de la ligne droite dans des espaces immobiles.

Fig. 51.

Cas 1. Que le mouvement soit propagé du point A par le trou BC , & qu'il continue, s'il est possible, dans l'espace conique $BCQP$, selon des lignes droites qui divergent du point A . Sup-

posons premièrement que ce mouvement soit un mouvement d'ondulation excité dans la superficie d'une eau stagnante & soient de, fg, hi, kl , &c. les éminences de chacune de ces ondes distinguées l'une de l'autre par autant de cavités. Comme l'eau est plus haute dans les éminences des ondes que dans les parties immobiles KL, NO du fluide; elle s'écoulera par conséquent des extrémités e, g, i, l , &c. d, f, h, k , &c. des sommets de ces éminences, vers KL & NO : & comme elle est plus basse dans les cavités de ces ondes que dans les parties immobiles KL, NO du fluide, elle s'écoulera de ces parties immobiles dans ces cavités. Par le premier écoulement de l'éminence des ondes, & par l'autre les cavités se dilateront çà & là, & s'étendront vers KL & NO . Et parce que le mouvement des ondes de A vers PQ se fait par un écoulement continu des éminences dans les cavités prochaines, & que par conséquent il n'a pas plus de vitesse que n'en peut donner la chute; & que la chute de l'eau de côté & d'autre se doit faire vers KL & NO avec la même vitesse, la dilatation des ondes sera propagée d'un côté & de l'autre vers KL & NO avec la même vitesse, avec laquelle ces ondes elles-mêmes s'étendent de A vers PQ en ligne droite. Donc tout l'espace de côté & d'autre vers KL & NO sera occupé par les ondes dilatées $rfgr, shis, tklt, vmnv$, &c. C. Q. F. D.

On peut se convaincre que cela se passe ainsi dans les eaux stagnantes.

Cas 2. Supposons à-présent que de, fg, hi, kl, mn représentent des pulsions imprimées du point A & continuées successivement dans un milieu élastique. Supposons de plus que ces pulsions soient propagées par des condensations & des raréfactions successives du milieu, en sorte que la partie la plus dense d'une pulsion quelconque occupe la superficie sphérique décrite autour du centre A , & qu'il y ait des intervalles égaux entre les pulsions successives. Que les lignes de, fg, hi, kl , &c. représentent les parties les plus denses des pulsions, lesquelles se propagent par le

trou.

trou BC ; comme le milieu est plus dense dans ce lieu que dans les espaces d'un côté & de l'autre vers KL & NO , il se dilatera tant vers ces espaces KL & NO situés des deux côtés que vers les espaces les plus rares qui sont entre les pulsions; ce qui le rendant toujours plus rare vers ces intervalles & plus dense vers les pulsions, le fera participer à tous ces mêmes mouvemens.

Et parce que le mouvement progressif des pulsions vient du relâchement continuel des parties les plus denses vers les intervalles antécédens les plus rares; & que ces pulsions doivent s'étendre de côté & d'autre avec la même vitesse à peu près vers les parties KL , NO du milieu, lesquelles sont en repos; ces pulsions se dilateront d'un côté & de l'autre dans les espaces immobiles KL , NO , avec la même vitesse à peu près avec laquelle elles sont propagées directement du centre A ; & par conséquent elles occuperont l'espace entier $KLON$. *C. Q. F. D.*

On l'éprouve ainsi dans les sons, car le son s'entend quoiqu'il y ait une montagne entre le corps sonore & nous, & lorsqu'il entre dans une chambre par une fenêtre, il se répand dans toute la chambre, enforte qu'on l'entend de tous ses coins, non pas tant parce qu'il est réfléchi par les murailles de la chambre opposées au lieu où on l'entend, que parce qu'il y arrive en droiture de la fenêtre, autant qu'on en peut juger par les sens.

Cas 3. Supposons enfin qu'un mouvement d'un genre quelconque soit propagé de A par l'ouverture BC : comme cette propagation ne se peut faire si les parties du milieu les plus proches du centre A ne pressent & ne meuvent les parties situées au-delà; ces parties pressées étant fluides, elles se répandront de toutes parts vers les lieux où elles sont moins pressées, & elles se répandront vers toutes les parties du milieu qui sont en repos, tant vers les latérales KL , NO , que vers les antérieures PQ , & par ce moyen, tout le mouvement qui a passé premièrement par l'ouverture BC , commencera à se dilater & à s'étendre en ligne.

 LIVRE
SECOND.

Fig. 50.

droite de cette ouverture comme de son origine & comme d'un centre vers toutes les parties. *C. Q. F. D.*

PROPOSITION XLIII. THÉORÈME XXXIV.

Tout corps vibrant propagera de toutes parts en ligne droite dans un milieu élastique le mouvement des pulsions ; & dans un milieu non élastique il excitera un mouvement circulaire.

Cas 1. Les parties du corps vibrant en s'étendant & se contractant alternativement presseront & pousseront en s'étendant les parties du milieu qui les touchent , & en les pressant elles les condenseront ; & ensuite en se contractant elles laisseront ces parties comprimées en liberté de s'étendre & de s'éloigner les unes des autres. Donc les parties du milieu qui touchent ce corps vibrant , s'étendront & se contracteront tour à tour , comme les parties de ce corps : & par la même raison que les parties de ce corps excitent des ondulations dans les parties de ce milieu qui le touchent , ces parties produiront à leur tour de semblables ondulations dans celles auxquelles elles sont contigues , lesquelles en exciteront dans les parties qui en sont les plus éloignées , & ainsi de suite à l'infini. Et comme les premières parties de ce milieu sont condensées lorsque les parties du corps vibrant s'étendent , & qu'elles s'étendent lorsque les parties de ce corps se contractent , de même les autres parties du milieu sont condensées toutes les fois que les parties du corps s'étendent , & elles s'étendent toutes les fois que ce corps se contracte. Et par conséquent elles ne se condenseront & ne s'étendront pas toutes en même temps (car si elles conservoient ainsi des distances déterminées entr'elles , elles ne se raréfieroient point & elles ne se condenseroient point tour à tour) mais en s'approchant l'une de l'autre par la condensation , & en s'en éloignant par l'extension , il y en aura quelques-unes qui s'éloigneront pendant que d'autres reviendront ; & cela alternativement à l'infini. Les parties qui vont en s'éloignant & qui en allant se condensent par leur mouvement progressif , dans lequel elles frappent con-

tre les obstacles, causent des pulsions; & par conséquent les pulsions successives de tout corps vibrant se propageront en ligne droite. Et cela à des intervalles les uns des autres à peu près égaux à cause de l'égalité des intervalles des temps dans lesquels le corps à chacune de ses vibrations excite chacune des pulsions. Et quoique les parties du corps vibrant aillent & reviennent vers un côté déterminé, cependant les pulsions qui se propagent de là dans le milieu se dilateront vers les côtés, par la Prop. précédente; & elles se propageront en tout sens dans des superficies à peu près sphériques & concentriques en partant de ce corps à ressort comme du centre commun. Nous avons quelque exemple de cela dans l'eau, car si on la remue avec le bout du doigt, ce mouvement se continue non seulement de côté & d'autre dans le sens dans lequel le doigt s'est mû, mais il s'y continue par des espèces de cercles concentriques qui environnent le doigt dans l'instant, & qui se propagent de tous côtés; car la pesanteur du fluide tient lieu de force élastique.

Cas 2. Si le milieu n'est pas élastique: comme alors les parties ne peuvent être condensées par les vibrations des parties du corps vibrant qui les pressent, le mouvement se propagera en un instant du côté vers lequel le milieu cédera le plus facilement, c'est-à-dire, du côté vers lequel le corps vibrant laisseroit sans cela du vuide derrière lui. Ce cas est le même que celui d'un corps projeté dans un milieu quelconque. Le milieu en cédant aux projectiles ne s'en écarte pas à l'infini; mais en se mouvant circulairement il va remplir la place que le corps laisse derrière lui. Donc toutes les fois qu'un corps à ressort s'avance vers quelque côté, le milieu, en cédant, s'avance par un cercle vers le côté que le corps abandonne; & toutes les fois que le corps revient à son premier lieu, il en repousse le milieu qui revient alors à celui qu'il occupoit auparavant. Quand le corps vibrant ne seroit pas roide, mais absolument flexible, si cependant il demeure de même grandeur, comme il ne peut presser par

ses vibrations le milieu dans un lieu quelconque qu'il ne lui cede de la place en même temps quelqu'autre part; il arrivera que le milieu s'écartant des lieux où il est pressé, s'avancera toujours en rond vers les parties qui lui cedent. *C. Q. F. D.*

Cor. Ceux-là se trompent donc qui croient que l'agitation des parties de la flamme cause seule la propagation de la pression en ligne droite dans le milieu ambiant. Cette pression ne vient pas seulement du mouvement des parties de la flamme, mais encore de la dilatation du total.

PROPOSITION XLIV. THÉORÈME XXXV.

Si de l'eau descend & monte alternativement dans les branches KL, MN d'un canal; & qu'on ait un pendule dont la longueur entre le point de suspension & le centre d'oscillation soit égale à la moitié de la longueur de la colonne d'eau qui est dans le canal: je dis que l'eau montera & descendra dans ce canal dans les mêmes temps dans lesquels ce pendule oscillera.

Fig. 51. & 52. Je mesure la longueur de la colonne d'eau dans le sens des axes du canal & des branches, & je la suppose égale à la somme de ces axes; je néglige la résistance de l'eau qui vient de son frottement contre les branches du canal. Que *AB*, *CD* représentent donc la moyenne hauteur de l'eau dans l'une & l'autre branche; & lorsque l'eau montera dans la branche *KL* à la hauteur *EF* elle descendra dans la branche *MN* à la hauteur *GH*. Soit *P* le corps suspendu, *VP* le fil auquel il tient, *V* le point de suspension, *R PQ S* la cycloïde que le pendule décrit, *P* son point le plus bas, *PQ* un arc égal à la hauteur *AE*. La force par laquelle le mouvement de l'eau est alternativement accéléré & retardé, est l'excès du poids de l'eau dans l'une ou l'autre branche sur son poids dans la branche opposée: donc, lorsque l'eau monte à la hauteur *EF* dans la branche *KL*, & que dans l'autre branche elle descend en *GH*, cette force est double du poids de l'eau *EABF*, & par conséquent elle est au poids de toute l'eau comme *AE* ou *PQ* à *VP* ou *PR*. Mais la

force par laquelle le corps P est accéléré & retardé dans la cycloïde à un lieu quelconque Q est (par le Cor. de la Prop. 51.) à son poids total, comme la distance PQ du lieu le plus bas P , à la longueur PR de la cycloïde. Ainsi les forces motrices de l'eau & du pendule, lorsqu'ils parcourent les espaces égaux AE, PQ , sont comme les poids à mouvoir. Donc, si l'eau & le pendule sont en repos dans le commencement, ces forces les feront mouvoir également dans des temps égaux, & feront que par un mouvement réciproque l'eau & le pendule iront & reviendront dans les mêmes temps. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Donc toutes les ascensions & descensions de l'eau sont isochrones, soit que le mouvement soit plus prompt ou plus lent.

Cor. 2. Si la longueur de toute la colonne d'eau dans le canal est de $6\frac{1}{2}$ pieds de Paris, l'eau descendra dans une seconde & montera dans une autre seconde; & ainsi de suite alternativement à l'infini. Car un pendule de $3\frac{1}{8}$ pieds fait une oscillation dans une seconde.

Cor. 3. La longueur de la colonne d'eau étant augmentée ou diminuée, le temps de ses oscillations augmentera ou diminuera en raison sousdoublée de cette longueur.

PROPOSITION XLV. THÉORÈME XXXVI.

La vitesse des ondes est en raison sousdoublée de leur largeur.

C'est ce qui suit de la construction de la Proposition suivante.

PROPOSITION XLVI. PROBLÈME X.

Trouver la vitesse des ondes.

Il faut prendre un pendule dont la longueur entre le point de suspension & le centre d'oscillation soit égale à la largeur des ondes : & dans le même temps dans lequel le pendule achevera chaque oscillation, les ondes parcoureront en avançant un espace presque égal à leur largeur.

J'appelle largeur des ondes l'espace transversal qui est entre

LIVRE
SECOND.

Fig. 51. & 52.

leur moindre ou leur plus grande élévation. Que $A B C D E F$ représente une eau stagnante dont la superficie monte & descende par des ondes successives ; que A, C, E , &c. soient les éminences de ces ondes, & B, D, F &c les cavités intermédiaires qui les séparent, comme le mouvement des ondes se fait par l'ascension & la descente successive de l'eau, en sorte que les parties A, C, E , &c. qui sont les plus hautes deviennent ensuite les plus basses ; & que la force motrice qui fait monter les parties les plus basses & descendre les plus hautes, est le poids de l'eau élevée ; cette ascension & cette descente alternatives seront analogues au mouvement d'oscillation de l'eau dans le canal, & elles observeront les mêmes loix par rapport au temps : & par conséquent (par la Prop. 44.) si les distances entre les lieux les plus hauts A, C, E , & les plus bas B, D, F des ondes sont égales au double de la longueur du pendule ; les parties les plus hautes A, C, E , deviendront les plus basses dans le temps d'une oscillation, & dans le temps d'une autre oscillation elles redeviendront les plus hautes. Donc il y aura le temps de deux oscillations entre chacune de ces ondes ; c'est-à-dire, que chacune de ces ondes parcourra sa largeur dans le temps que le pendule emploiera à faire deux oscillations ; mais dans ce même temps un pendule, dont la longueur seroit quadruple & qui par conséquent seroit égal à la largeur de ces ondes, feroit une oscillation. Donc, &c. $C. Q. F. T.$

Cor. 1. Donc les ondes qui ont $3 \frac{1}{18}$ pieds de Paris de largeur en avançant dans une seconde parcoureront leur largeur ; & par conséquent dans une minute elles parcoureront $183 \frac{1}{3}$ pieds, & dans une heure 11000 pieds environ.

Cor. 2. Et la vitesse des plus grandes ou des moindres ondes augmentera ou diminuera en raison soussoublée de leur largeur.

Cela est ainsi dans l'hypothèse que toutes les parties de l'eau montent & descendent en ligne droite ; mais cette ascension & cette descente se font plutôt par des cercles, ainsi par cette Proposition le temps n'est déterminé qu'à peu près.

Des pulsions étant propagées dans un fluide, chacune des particules de ce fluide, qui vont & qui viennent par un mouvement réciproque très-prompt, sont toujours accélérées & retardées suivant les loix des oscillations des pendules.

Que AB, BC, CD , &c. représentent les distances égales des pulsions successives; ABC l'espace dans lequel s'exécutent les mouvemens de ces pulsions propagées de A vers B ; soient E, F, G trois points physiques du milieu en repos placés sur la ligne AC à des distances égales les uns des autres; Ee, Ff, Gg les espaces égaux très-petits dans lesquels ces points vont & viennent à chaque vibration par un mouvement réciproque; ϵ, ϕ, γ , les lieux quelconques intermédiaires de ces mêmes points; & EF, FG des petites lignes physiques, ou les parties linéaires du milieu qui sont entre ces points & qui sont transportées successivement dans les lieux ϵ, ϕ, γ , & $\epsilon f, fg$. Soit tirée PS égale à la ligne Ee : & soit cette ligne PS partagée en deux parties égales au point O , & du centre O & de l'intervalle OP soit décrit le cercle $SIPi$. Que la circonférence entière & ses parties représentent le temps entier d'une vibration avec ses parties proportionnelles; enforte que le temps quelconque PH ou $PHSh$ étant écoulé, si on tire HL ou hl perpendiculaire sur PS , & qu'on prenne Ee égale à PL ou à Pl , le point physique E se trouvera en ϵ . Par cette loi un point quelconque E allant de E par ϵ à ϵ , & revenant ensuite de ϵ par ϵ à E , achevera chacune de ses vibrations avec les mêmes degrés de retardation & d'accélération que le pendule qui oscille. Il s'agit donc de prouver que chaque point physique du milieu doit être agité par un tel mouvement. Supposons que le milieu soit mû de cette sorte par quelque cause, & voyons ce qui doit suivre de cette supposition.

Dans la circonférence $PHSh$ soient pris les arcs égaux HI ; IK ou hi, ik , qui ayent à la circonférence entière la raison que

Fig. 54. & 55.

les droites égales EF , FG ont à l'intervalle entier BC des pulsions. Et ayant abaissé les perpendiculaires IM , KN ou im , kn ; parce que les points E , F , G sont successivement agités par des mouvemens semblables, & que pendant ce temps ils achevent leurs vibrations entières composées de l'allée & du retour pendant que les pulsions se communiquent de B à C ; si PH ou PHS représente le temps écoulé depuis le commencement du mouvement du point E , PI ou $PHSi$ représentera le temps écoulé depuis le commencement du mouvement du point F , & PK ou $PHSk$, le temps écoulé depuis le commencement du mouvement du point G ; & par conséquent $E\epsilon$, $F\phi$, $G\gamma$ seront égaux respectivement à PL , PM , PN , ou à Pl , Pm , Pn , le premier dans l'allée, & le second dans le retour de ces points. D'où $\epsilon\gamma$, ou $EG + G\gamma - E\epsilon$ dans l'allée sera égal à $EG - LN$, & dans le retour à $EG + Ln$. Mais $\epsilon\gamma$ est la largeur ou l'expansion de la partie du milieu EG dans le lieu $\epsilon\gamma$; & par conséquent l'expansion de cette partie dans l'allée est à son expansion moyenne, comme $EG - LN$ à EG ; & dans le retour comme $EG + Ln$ ou $EG + LN$ à EG . C'est pourquoi, LN étant à KH comme IM au rayon OP , & KH étant à EG comme la circonférence $PHShP$ à BC , c'est-à-dire, (si on prend V pour le rayon du cercle, dont la circonférence est égale à l'intervalle des pulsions BC), comme OP à V ; & par conséquent LN étant à EG comme IM à V ; l'expansion de la partie EG ou du point physique F dans le lieu $\epsilon\gamma$ est à l'expansion moyenne de cette partie dans son premier lieu EG , comme $V - IM$ à V dans l'allée, & comme $V + im$ à V dans le retour. D'où, la force élastique du point F dans le lieu $\epsilon\gamma$ est à sa force élastique moyenne dans le lieu EG , comme $\frac{1}{V - IM}$ à $\frac{1}{V}$ dans l'allée, mais dans le retour elle est comme $\frac{1}{V + im}$ à $\frac{1}{V}$. Et par le même raisonnement les forces élastiques des points physiques E & G dans l'allée.

l'allée, font comme $\frac{1}{V-HL}$ & $\frac{1}{V-KN}$ à $\frac{1}{V}$; & la différence des forces à la force élastique moyenne du milieu comme $\frac{HL-KN}{VV-V \times HL-V \times KN+HL \times KN}$ à $\frac{1}{V}$. C'est-à-dire, comme $\frac{HL-KN}{VV}$ à $\frac{1}{V}$, ou comme $HL-KN$ à V , en supposant (à cause des limites étroites dans lesquelles se font les vibrations) HL & KN indéfiniment plus petites que la quantité V . Comme cette quantité V est donnée, la différence des forces est comme $HL-KN$, c'est-à-dire, (à cause des proportionsnelles $HL-KN$ à HK , & OM à OI ou OP , & des données HK & OP) comme OM ; ou, ce qui revient au même, si Ff est coupée en deux également en α , comme $\alpha \phi$. Et, par le même argument, la différence des forces élastiques des points physiques ϵ & γ dans le retour de la petite ligne physique $\epsilon \gamma$ est comme $\alpha \phi$. Mais cette différence, (c'est-à-dire, l'excès de la force élastique du point ϵ sur la force élastique du point γ) est la force par laquelle la petite ligne physique $\epsilon \gamma$ du milieu, laquelle est entre deux, est accélérée dans l'allée & retardée dans le retour; & par conséquent, la force accélératrice de la petite ligne physique $\epsilon \gamma$ est comme sa distance au point de milieu α de la vibration. Donc le temps est exprimé exactement par l'arc PI . (Selon la Prop. 38. du Liv. 1.) Et la partie linéaire $\epsilon \gamma$ du milieu se mouvra selon la loi prescrite, c'est-à-dire, selon les loix des pendules oscillans: il en est de même de toutes les parties linéaires dont le milieu entier est composé. *C. Q. F. D.*

Cor. Il est clair delà, que le nombre des pulsions propagées est le même que le nombre des vibrations du corps vibrant, & qu'il n'augmente point dans leur progrès. Car la petite ligne physique $\epsilon \gamma$, dans le moment qu'elle reviendra à son premier lieu, fera en repos; & elle ne se mouvra point ensuite, à moins que le choc du corps vibrant ou celui des pulsions qui se propagent depuis ce corps, ne lui communique un nouveau mouvement.

Elle fera donc en repos dans le moment que les pulsions qui viennent du corps vibrant cesseront d'être propagées.

PROPOSITION XLVIII. THÉORÈME XXXVIII.

Les vitesses des pulsions qui se propagent dans un milieu élastique sont en raison composée de la raison sousdoublée de la force élastique directement, & de la raison sousdoublée de la densité inversement ; en supposant la force élastique du fluide proportionnelle à sa condensation.

Cas 1. Si les milieux sont homogènes, & que les distances des pulsions soient égales entr'elles dans ces milieux, mais que le mouvement soit plus grand dans un des milieux : les contractions & les dilatations des parties analogues feront comme ces mêmes mouvemens. Mais cette proportion n'est pas exacte ; cependant si les contractions & les dilatations sont très-grandes, elle ne sera pas loin de l'être & on pourra la prendre physiquement pour telle. Mais les forces élastiques motrices sont comme les contractions & les dilatations ; & les vitesses des parties égales qui ont été produites en même temps sont comme les forces. Donc les parties égales & correspondantes des pulsions correspondantes achevent ensemble leur allée & leur retour dans des espaces proportionnels aux contractions & aux dilatations, & cela avec des vitesses qui sont comme ces espaces : & par conséquent les pulsions, qui dans le temps de l'allée & du retour parcourent en avançant leur largeur entière, & qui succèdent toujours à la place des pulsions précédentes, avancent avec une vitesse égale dans l'un & l'autre milieu à cause de l'égalité des distances.

Cas 2. Si les distances ou les longueurs des pulsions sont plus grandes dans un milieu que dans l'autre ; supposons que les parties correspondantes décrivent des espaces proportionnels aux largeurs des pulsions à chaque fois qu'elles vont & qu'elles viennent : alors leurs contractions ainsi que leurs dilatations seront égales. Donc si les milieux sont homogènes, les forces motrices élasti-

ques qui les agitent d'un mouvement réciproque seront aussi égales. Mais la matiere que ces forces doivent mouvoir est comme la largeur des pulsions : & l'espace dans lequel elles doivent achever leur allée & leur retour est dans la même raison. Le temps d'une allée & d'un retour est donc en raison composée de la raison soufdoublée de la matiere & de la raison soufdoublée de l'espace, & par conséquent il est comme l'espace. Mais les pulsions pendant les temps d'une allée & d'un retour parcourent leurs largeurs, c'est-à-dire, des espaces proportionnels aux temps; donc leurs vitesses sont égales.

Cas 3. Donc dans les milieux dont la force élastique & la densité sont les mêmes, toutes les pulsions ont la même vitesse. Et si on augmente ou la densité ou la force élastique du milieu, comme la force motrice augmente en raison de la force élastique, & la matiere qu'il faut mouvoir en raison de la densité : le temps dans lequel les mêmes mouvemens s'exécuteront comme auparavant, augmentera en raison soufdoublée de la densité, & diminuera en raison soufdoublée de la force élastique. Et par conséquent la vitesse des pulsions fera en raison composée de la raison soufdoublée de la densité du milieu inversement, & de la raison soufdoublée de la force élastique directement. *C. Q. F. D.*

Cette Proposition deviendra encore plus évidente par la construction de la Proposition suivante.

PROPOSITION XLIX. PROBLÈME XI.

La densité & la force élastique du milieu étant données, trouver la vitesse des pulsions.

Supposons que le milieu soit comprimé comme notre air par un poids qui incombe dessus; & que *A* soit la hauteur du milieu homogène dont le poids est égal au poids incombant, & dont la densité soit la même que celle du milieu comprimé dans lequel les pulsions sont propagées. Qu'on suppose un pendule, dont la longueur entre le point de suspension & le centre d'oscillation

Fig. 54. & 55.

soit A : & dans le temps que ce pendule emploiera à faire une oscillation entière composée de l'allée & du retour, la pulsion en avançant parcourra un espace égal à la circonférence du cercle dont le rayon est A .

Car les constructions de la Proposition 47. étant conservées, si une ligne physique quelconque EF , en décrivant à chaque vibration un espace PS , est pressée dans les extrémités P & S de son allée & de son retour par une force élastique égale à son poids; elle achevera chacune de ses vibrations dans le temps dans lequel cette même ligne pourroit osciller dans une cycloïde dont le périmètre seroit égal à toute la longueur PS : & cela parce que des forces égales doivent faire parcourir dans le même temps à des corpuscules égaux des espaces égaux. C'est pourquoi comme les temps des oscillations sont en raison sousdoublée de la longueur des pendules, & que la longueur du pendule est égale à la moitié de l'arc de la cycloïde entière; le temps d'une vibration sera au temps de l'oscillation du pendule dont la longueur est A , en raison sousdoublée de la longueur $\frac{1}{2}PS$ ou PO à la longueur A . Mais la force élastique qui presse la petite ligne physique EG lorsqu'elle est dans les extrémités P & S , étoit (dans la démonstration de la Prop. 47.) à la force élastique entière, comme $HL - KN$ à V , c'est-à-dire, (lorsque le point K tombe sur P) comme HK à V : & cette force entière, c'est-à-dire, le poids incombant par lequel la petite ligne EG est comprimée, est au poids de cette petite ligne comme la hauteur A du poids incombant est à la longueur EG de la petite ligne; donc, la force par laquelle la petite ligne, EG est pressée dans les lieux P & S , est au poids de cette petite ligne, comme $HK \times A$ à $V \times EG$, ou comme $PO \times A$ à VV , car HK étoit à EG comme PO à V . Ainsi, comme les temps, dans lesquels les corps égaux sont poussés dans des espaces égaux, sont réciproquement en raison sousdoublée des forces, le temps d'une vibration produite par la pression de la force élastique sera au temps d'une vibration pro-

duite par la force du poids, en raison soufdoublée de VV à $PO \times A$, & ce temps est par conséquent au temps de l'oscillation du pendule dont la longueur est A , en raison soufdoublée de VV à $PO \times A$ & en raison soufdoublée de PO à A conjointement ; c'est-à-dire, dans la raison entiere de V à A . Mais dans le temps d'une vibration entiere composée de l'allée & du retour, la pulsion, en avançant, parcourt la largeur entiere BC . Donc le temps dans lequel la pulsion parcourt l'espace BC , est au temps d'une oscillation entiere, composée de l'allée & du retour, comme V est à A , c'est-à-dire, comme BC est à la circonférence du cercle dont le rayon est A . Donc le temps dans lequel la pulsion parcourra l'espace BC , est dans la même raison au temps dans lequel elle parcourra la longueur égale à cette circonférence ; donc, dans le temps d'une telle oscillation, la pulsion parcourra une longueur égale à cette circonférence.
C. Q. F. D.

Cor. 1. La vitesse des pulsions est celle que les graves acquierent en tombant d'un mouvement également accéléré, & en parcourant dans leur chute la moitié de la hauteur A . Car dans le temps de cette chute la pulsion parcourra avec la vitesse qu'un corps auroit acquise en tombant un espace qui sera égal à toute la hauteur A ; donc dans le temps d'une oscillation entiere composée de l'allée & du retour, elle parcourra un espace égal à la circonférence du cercle dont le rayon est A : donc le temps de la chute est au temps de l'oscillation comme le rayon du cercle est à sa circonférence.

Cor. 2. Ainsi, cette hauteur A étant directement comme la force élastique du fluide, & inversement comme sa densité ; la vitesse des pulsions fera en raison composée de la raison soufdoublée de la densité inversement, & de la raison soufdoublée de la force élastique directement.

PROPOSITION L. PROBLÈME XII.

Trouver les distances des pulsions.

Il faut trouver le nombre des vibrations qu'un corps excite par les trémulations dans un temps donné. Et il faut diviser par ce nombre l'espace que la pulsion peut parcourir dans le même temps, & le quotient sera la largeur d'une pulsion. C. Q. F. T.

S C H O L I E.

Ces dernières Propositions peuvent s'appliquer au mouvement de la lumière & des sons. Car la lumière se propageant en ligne droite ne peut consister dans la seule action. (Selon les Prop. 41 & 42.) Et quant aux sons, comme ils viennent des corps sonores ils ne sont en effet (Prop. 43.) que les pulsions de l'air propagées, c'est ce qui est confirmé par les vibrations que les sons excitent dans les corps voisins, surtout s'ils sont forts & graves, tels que ceux des tambours. Car les vibrations les plus promptes & les plus courtes sont celles qui s'excitent le plus difficilement. Or, que les sons, quels qu'ils soient, excitent des vibrations dans les cordes qui sont à l'unisson des corps sonores, c'est ce qui est connu de tout le monde, & ce qui est aussi confirmé par la vitesse du son. Les poids spécifiques de l'eau de pluie & du vif-argent sont l'un à l'autre comme 1 à $13\frac{2}{3}$ environ, & lorsque le mercure est à la hauteur de 30 pouces anglois dans le baromètre, les poids spécifiques de l'air & de l'eau de pluie sont alors l'un à l'autre comme 1 à 870 environ : donc les poids spécifiques de l'air & du vif-argent sont entr'eux comme 1 à 11890, donc la hauteur du vif-argent étant de 30 pouces dans le baromètre, la hauteur de l'air uniforme, dont le poids peut comprimer notre air d'ici-bas, sera de 356700 pouces, ou de 29725 pieds anglois. C'est cette hauteur que nous avons nommée *A* dans la construction du Problème précédent. La circonférence du cercle dont le rayon est de 29725

pieds en a 186768 & comme on ſçait qu'un pendule de $39\frac{1}{2}$ pouces fait une oſcillation compoſée de ſon allée & de ſon retour en deux ſecondes , un pendule qui auroit 29725 pieds ou 356700 pouces devroit faire une ſemblable oſcillation en $190\frac{1}{4}$; donc , pendant ce temps , le ſon parcourera 186768 pieds , & 979 pieds en une ſeconde.

Au reſte , dans ce calcul , je n'ai point eu d'égard à l'épaiſſeur des particules ſolides de l'air par leſquelles le ſon ſe communique en un inſtant. Car le poids de l'air étant au poids de l'eau comme 1 à 870 , & les ſels étant preſque deux fois plus denſes que l'eau ; ſi on ſuppoſe que les particules de l'air ſont à peu près de la même denſité que les particules de l'eau ou des ſels , & que la rareté de l'air vienne ſeulement des intervalles qui ſont entre ſes particules : le diamètre d'une particule d'air ſera à l'intervalle entre les centres des particules comme , 1 à 9 ou 10 à peu près , & à l'intervalle entre les particules comme 1 à 8 ou 9. Et par conſéquent , il faut ajouter à 979 pieds que le ſon doit parcourir en une ſeconde , ſelon le calcul précédent , 272 pieds ou 109 pieds à peu près , à cauſe de l'épaiſſeur des particules de l'air : & alors le ſon parcourera 1088 pieds environ en une ſeconde.

Ajoutez à cela , que comme les vapeurs cachées dans l'air ont un autre reſſort , & qu'elles ſont d'un autre ton , elles participent à peine au mouvement de l'air pur qui propage les ſons. Or lorsque ces parties ſont en repos , ce mouvement eſt propagé plus vite par le ſeul air pur , & cela en raiſon ſouſdoublée de la rareté de la matiere ; enſorte que ſi l'atmoſphere eſt compoſée de dix parties d'air pur & d'une partie de vapeurs , le mouvement des ſons ſera plus prompt , dans la raiſon ſouſdoublée de 11 à 10 , c'eſt-à-dire , à peu près , dans la raiſon de 21 à 20 , que ſ'il étoit compoſé de onze parties d'air pur : donc la vîteſſe du mouvement du ſon ci-devant trouvée doit être augmentée dans cette raiſon. Ce qui fait que le ſon doit parcourir 1142 pieds en une ſeconde.

Cela doit être ainsi dans le printemps & dans l'automne, lorsque l'air est raréfié par une chaleur modérée, & que sa force élastique est sensiblement augmentée. Mais dans l'hiver, où l'air est condensé par le froid, & où sa force élastique est diminuée, le mouvement du son doit être plus lent en raison sous-doublée de la densité de l'air; & au contraire, dans l'été il doit être plus prompt; or on sçait par expérience que le son parcourt à peu près 1142 pieds de Londres & 1070 pieds de Paris en une seconde.

La vitesse des sons étant connue, on connoîtra les intervalles des vibrations. *M. Sauveur* a trouvé par ses expériences, qu'un tuyau ouvert, long environ de cinq pieds de Paris, rend un son du même ton que celui d'une corde qui fait cent vibrations en une seconde. Il se fait donc environ 100 vibrations à peu près dans un espace de 1070 pieds de Paris que le son parcourt en une seconde; & par conséquent une vibration occupe un espace d'environ $10\frac{7}{10}$ pieds de Paris, c'est-à-dire, deux fois la longueur du tuyau. D'où il est vraisemblable que les largeurs des vibrations des sons dans tous les tuyaux ouverts, sont égaux au double de la longueur des tuyaux.

De plus, on voit (par le Cor. de la Prop. 47. de ce Livre) pourquoi les sons cessent dans l'instant que les mouvemens du corps sonore viennent à cesser. Et pourquoi nous ne les entendons pas plus long-temps lorsque nous sommes éloignés du corps sonore que lorsque nous en sommes très-près. On voit aussi, par les principes qu'on a posés, pourquoi les sons augmentent dans les porte-voix. Car tout mouvement réciproque a coutume d'augmenter à chaque réflexion par la même cause qui le produit. Ainsi le mouvement se perd plus tard & se réfléchit plus fortement dans les tubes qui s'opposent à la dilatation du son, & par conséquent, il s'augmente par le mouvement nouveau imprimé à chaque réflexion. Ce sont-là les principaux phénomènes des sons.

SECTION

NEUVIÈME SECTION.

Du mouvement circulaire des fluides.

HYPOTHESE.

La résistance qui vient du défaut de lubricité des parties d'un fluide doit être , toutes choses égales , proportionnelle à la vitesse avec laquelle les parties de ce fluide peuvent être séparées les unes des autres.

PROPOSITION LI. THÉORÈME XXXIX.

Si un cylindre solide infiniment long , tourne autour d'un axe donné de position par un mouvement uniforme , dans un fluide homogène & infini , que le fluide soit tourné en rond par cette seule impulsion , & que chaque partie du fluide continue uniformément dans son mouvement ; les temps périodiques des parties du fluide seront comme leurs distances de l'axe du cylindre.

Soit *AFL* un cylindre mû circulairement & uniformément autour de son axe *S* , & que le fluide soit paragé en un nombre infini d'orbes cylindriques concentriques & solides de la même épaisseur , par des cercles concentriques *BGM* , *CHN* , *DIO* , *EKP* , &c. Ce fluide étant homogène , les impressions que les orbes contigus feront les uns sur les autres seront (par l'hypothèse) comme leurs translations réciproques , & comme les superficies contigus dans lesquelles se font ces impressions. Si l'impression faite dans quelque orbe est plus forte ou plus foible dans sa partie concave que dans sa partie convexe ; la plus forte impression prévaudra , & elle accélérera ou retardera le mouvement de l'orbe , selon qu'elle sera dirigée , eu égard à son mouvement , vers le même côté , ou vers le côté opposé. Donc , pour

Fig. 564

DU
MOUVEMENT
DES CORPS.

Fig. 56.

que chaque orbe persévère uniformément dans son mouvement, les impressions qui viennent de part & d'autre, doivent être égales entr'elles & avoir des directions opposées. Donc, les impressions étant comme les superficies contigues, & leurs translations réciproques, ces translations seront inversement comme les superficies, c'est-à-dire, inversement comme les distances de ces superficies à l'axe. Mais les différences des mouvemens angulaires autour de l'axe sont comme ces translations divisées par les distances, ou comme les translations directement & les distances inversement, c'est-à-dire, en composant ces raisons, inversement comme les quarrés des distances. Donc, si à chaque partie de la droite infinie $SABCDEQ$ on élève les perpendiculaires Aa , Bb , Cc , Dd , Ee &c. réciproquement proportionnelles aux quarrés de ces parties SA , SB , SC , SD , SE &c. & que par les extrémités des perpendiculaires on imagine une ligne hyperbolique; les sommes de ces différences, c'est-à-dire, tous les mouvemens angulaires, seront comme les sommes correspondantes des lignes Aa , Bb , Cc , Dd , Ee &c. c'est-à-dire, en supposant que pour former un milieu uniformément fluide on augmente le nombre des orbes & qu'on diminue leur largeur à l'infini, comme les aires hyperboliques AaQ , BbQ , CcQ , DdQ , EeQ &c. analogues à ces sommes. Et les temps réciproquement proportionnels à ces mouvemens angulaires seront aussi réciproquement proportionnels à ces aires. Donc, le temps périodique d'une particule quelconque D est réciproquement comme l'aire DdQ , c'est-à-dire, (par la quadrature connue des courbes) directement comme la distance SD . $C. Q. F. D.$

Cor. 1. Delà, les mouvemens angulaires des particules d'un fluide sont réciproquement comme leurs distances à l'axe du cylindre, & leurs vitesses absolues sont égales.

Cor. 2. Si un fluide est contenu dans un vase cylindrique d'une longueur infinie, & qu'il contienne un autre cylindre intérieur, que ces deux cylindres tournent autour de leur axe com-

mun , que les temps de leurs révolutions soient comme leur demi diamètre , & que chacune des parties du fluide continue dans son mouvement , les temps périodiques de chacune des particules seront comme leurs distances à l'axe des cylindres.

Cor. 3. Si on ôte ou qu'on ajoute à un cylindre & à un fluide mû de cette sorte un mouvement quelconque angulaire commun ; comme par ce nouveau mouvement le frottement réciproque des parties du fluide n'est pas altéré , les mouvemens de ces parties entr'elles ne changeront pas. Car les translations réciproques des parties dépendent de leur frottement. Donc une partie quelconque conservera son mouvement lorsque ce mouvement sera tel qu'il ne sera pas plus accéléré que retardé par le frottement produit dans des parties opposées.

Cor. 4. Donc , si on ôte de ce système entier composé du fluide & des cylindres tout le mouvement angulaire du cylindre extérieur , on aura le mouvement du fluide dans un cylindre en repos.

Cor. 5. Donc , si le fluide & le cylindre extérieur , étant en repos , le cylindre intérieur tourne uniformément ; il communiquera un mouvement circulaire au fluide qui l'environne immédiatement , & ce mouvement se propagera peu à peu dans tout le fluide ; & il ne cessera point d'augmenter jusqu'à ce que chaque partie du fluide ait acquis le mouvement dont on a parlé dans le Cor. 4.

Cor. 6. Comme le fluide fait effort pour propager son mouvement encore plus loin , le cylindre extérieur fera aussi mû circulairement par cet effort , à moins qu'il ne soit fortement retenu ; & son mouvement s'accélérera jusqu'à ce que les temps périodiques de l'un & l'autre cylindre soient égaux entr'eux. Si le cylindre extérieur est fortement retenu , il s'efforcera de retarder le mouvement du fluide ; & à moins que le cylindre intérieur , par quelque mouvement imprimé du dehors , ne conserve ce mouvement , il cessera peu à peu par l'effort du cylindre extérieur.

Tout ceci peut s'éprouver dans une eau profonde stagnante.

PROPOSITION LII. THÉORÈME XL.

Si une sphère solide tourne d'un mouvement uniforme, autour d'un axe donné de position, dans un fluide homogène & infini, que le fluide soit mû circulairement par cette seule impulsion; & que chaque partie de ce fluide continue uniformement dans son mouvement: les temps périodiques des parties du fluide seront comme les carrés de leurs distances au centre de la sphère.

Fig. 56. Cas 1. Soit AFL une sphère mûe circulairement d'un mouvement uniforme autour de son axe S , & que le fluide soit partagé en un nombre infini d'orbes concentriques de même épaisseur par des cercles concentriques BGM , CHN , DIO , EKP &c. Supposez que ces orbes soient solides; comme le fluide est homogène, les impressions que les orbes contigues font les unes sur les autres seront (par l'hypothèse) comme leurs translations réciproques, & comme les superficies contigues sur lesquelles se font ces impressions. Si l'impression est plus forte ou plus foible dans quelque orbe vers la partie concave que vers la partie convexe; l'impression la plus forte prévaudra, & elle accélérera ou retardera la vitesse de l'orbe selon qu'elle sera dirigée du même côté ou d'un côté opposé à la direction de son mouvement. Donc, pour que chaque orbe continue uniformement dans son mouvement, les impulsions de part & d'autre doivent être égales entr'elles, & se faire vers des côtés opposés. Ainsi les impressions étant comme les superficies contigues & comme leurs translations réciproques; ces translations seront inversement comme les superficies, c'est-à-dire, inversement comme les carrés des distances des superficies au centre. Mais les différences des mouvemens angulaires autour de l'axe sont comme ces translations divisées par les distances, ou comme ces translations directement & les distances inversement; c'est-à-dire, en composant ces raisons, comme les cubes des distances inversement. C'est-pourquoi, si à chacune des parties de la droite infinie $SABCDEQ$ on élève les perpendiculaires Aa ,

Bb, Cc, Dd, Ee &c. réciproquement proportionnelles aux cubes de ces parties SA, SB, SC, SD, SE &c. Les sommes des différences, c'est-à-dire, les mouvemens entiers angulaires, seront comme les sommes correspondantes des lignes Aa, Bb, Cc, Dd, Ee &c. c'est-à-dire, (si le nombre des orbes augmente & que leur largeur diminue infiniment afin de former un milieu uniformement fluide) comme les aires hyperboliques AaQ, BbQ, CcQ, DdQ, EeQ , &c. analogues à ces sommes. Et les temps périodiques réciproquement proportionnels aux mouvemens angulaires seront aussi réciproquement proportionnels à ces aires. Donc le temps périodique d'un orbe quelconque DIO est réciproquement comme l'aire DdQ , c'est-à-dire, directement comme le carré de la distance SD . Et c'est ce que j'ai voulu premièrement démontrer.

Cas 2. Du centre de la sphere soit mené un grand nombre de droites infinies lesquelles fassent avec l'axe des angles donnés, & qui se surpassent les uns les autres de différences données ; supposez que ces droites, en tournant autour de l'axe, coupent les orbes en un nombre innombrable d'anneaux ; chacun de ces anneaux aura quatre anneaux qui lui seront contigus, un intérieur, un extérieur, & deux autres aux côtés. Un quelconque de ces anneaux, par le frottement intérieur & extérieur, ne peut-être pressé également dans des parties opposées si ce n'est par un mouvement qui se fasse selon la loi du premier cas ; c'est ce qui est clair par la démonstration de ce premier cas. Et par conséquent, la série quelconque d'anneaux, allant en ligne droite à l'infini depuis la sphere, se mouvra selon la loi du premier cas, à moins que le frottement des anneaux latéraux ne s'y oppose. Mais dans le mouvement qui se fait selon cette loi, le frottement des anneaux latéraux est nul ; ainsi il n'empêchera point que le mouvement ne se fasse selon cette loi. Si les anneaux, qui sont également éloignés du centre, tournoient plus vite ou plus lentement vers les pôles que vers l'écliptique ; les plus lents se-

roient accélérés, & les plus prompts seroient retardés par le frottement mutuel, & par là les temps périodiques deviendroient toujours égaux, selon la loi du cas premier. Ce frottement n'empêche donc pas que le mouvement ne se fasse selon la loi du premier cas, & par conséquent, cette loi aura lieu : c'est-à-dire, que les temps périodiques de chacun des anneaux seront comme les quarrés de leurs distances au centre du globe. Ce que j'avois à démontrer en second lieu.

Cas 3. Soit à-présent un de ces anneaux divisé par des sections transversales en des particules innombrables qui forment une substance absolument & uniformement fluide ; comme ces sections n'ont point de rapport à la loi du mouvement circulaire, mais seulement à la constitution du fluide, le mouvement circulaire continuera comme auparavant. Ainsi les aspérités de tous ces anneaux (lesquels sont supposés très-petits) ne changeront point par ces sections, non plus que la force de leurs frottemens mutuels ou bien ils changeront également. Ainsi la proportion des causes demeurant la même, la proportion des effets subsistera aussi, c'est-à-dire, la proportion des mouvemens & des temps périodiques. *C. Q. F. D.*

Cor. 1. Delà, les mouvemens angulaires des parties du fluide autour de l'axe de la sphere, sont réciproquement comme les quarrés des distances au centre de la sphere, & les vitesses absolues sont réciproquement comme ces mêmes quarrés divisés par les distances à l'axe.

Cor. 2. Si un globe tourne d'un mouvement uniforme, dans un milieu en repos, homogène & infini, autour d'un axe donné de position, il communiquera au fluide un mouvement de tourbillon, & ce mouvement se continuera peu à peu à l'infini ; & il ne cessera point d'être accéléré dans chaque partie du fluide, jusqu'à ce que les temps périodiques de chacune de ces parties soient comme les quarrés des distances au centre du globe.

Cor. 3. Parce que les parties intérieures du tourbillon, à cause de sa plus grande vitesse, pressent & frottent les extérieures, que

par cette action elles leur communiquent perpétuellement du mouvement, & que ces parties extérieures communiquent aussi en même temps la même quantité de mouvement à d'autres parties qui leur sont extérieures, & que par là elles conservent toujours leur quantité de mouvement sans aucune variation ; il est clair, que le mouvement se communique sans cesse du centre à la circonférence du tourbillon, & qu'il est absorbé dans l'infinité de cette circonférence. La matière du tourbillon contenue entre deux superficies sphériques quelconques concentriques, n'est donc jamais accélérée, parce que tout le mouvement que la matière intérieure reçoit est toujours transféré à la matière extérieure.

Cor. 4. Donc, afin que le mouvement du tourbillon se conserve le même, il faut un principe actif par lequel le globe reçoive toujours la même quantité de mouvement qu'il imprime à la matière du tourbillon ; & sans un tel principe, il faut nécessairement que le globe & les parties intérieures du tourbillon, communiquant sans cesse leur mouvement aux extérieures, & n'en recevant point de nouveau, perdent leur mouvement peu à peu, & qu'ils cessent enfin de tourner.

Cor. 5. Si un autre globe nâgeoit du centre de ce tourbillon, à une certaine distance & que dans le même temps il tournât continuellement, par quelque force, autour d'un axe dont l'inclinaison fut donnée ; par ce mouvement le fluide seroit forcé de tourner en tourbillon ; & ce nouveau tourbillon très-petit commenceroit à tourner avec le globe autour du centre de l'autre tourbillon, & peu à peu son mouvement se propageroit à l'infini, comme celui du premier tourbillon. Par la même raison qui fait que ce nouveau globe seroit emporté par le mouvement du premier tourbillon, le premier globe seroit aussi emporté par le mouvement du second tourbillon, enforte que ces deux globes tourneroient autour de quelque point intermédiaire, & qu'ils se fuiraient mutuellement par leur mouvement circulaire, à moins qu'ils ne fussent rapprochés par quelque autre force. Ensuite, si

les forces continuellement imprimées, par lesquelles ces globes continuent à se mouvoir, venoient à cesser, & que les loix de la mécanique permiffent toutes ces fuppositions, le mouvement de ces globes diminueroit peu à peu (par la raifon indiquée dans les Cor. 3. & 4.) & enfin les tourbillons feroient en repos.

Cor. 6. Si plusieurs globes tournent constamment dans des lieux donnés autour d'axes donnés de position, & avec des vitesses déterminées, il se formera autant de tourbillons à l'infini. Car chacun de ces globes, par la même raifon que le mouvement de l'un d'entr'eux se propage à l'infini, propagera auffi son mouvement à l'infini, enforte que chaque partie du fluide infini fera agitée du mouvement qui réfulte des actions de tous ces globes. Donc ces tourbillons ne feront pas terminés par des limites certaines, mais ils se mêleront peu à peu les uns les autres; & les globes par les actions de ces tourbillons les uns fur les autres feront perpétuellement dérangés de leur place, comme on l'a fait voir dans le Cor. précédent; & par conféquent, ils ne confervent point entr'eux une position fixe, à moins qu'ils ne foient retenus par quelqu'autre force. Mais les forces qui font continuellement imprimées à ces globes, & qui confervent leur mouvement, venant à cesser, la matiere cessera peu à peu de former des tourbillons, & fera à la fin en repos, par la raifon assignée dans les Cor. 3. & 4.

Cor. 7. Si un fluide homogène est enfermé dans un vase sphérique, & qu'il ait un mouvement de rotation uniforme autour d'un globe placé dans le centre, que ce globe & ce vase tournent du même côté autour du même axe, & que leurs temps périodiques foient comme les quarrés de leurs demi diamètres: les parties du fluide ne continueront pas à se mouvoir fans accélération ni retardation, à moins que leurs temps périodiques ne foient comme les quarrés des distances au centre du tourbillon. Car un tourbillon ne peut subsister par une autre loi.

Cor. 8. Si le vase, le fluide qui y est renfermé, & le globe confervent ce mouvement, & que de plus ils tournent d'un mouvement

vement angulaire commun autour d'un axe quelconque donné ; comme par ce nouveau mouvement le frottement des parties du fluide entr'elles ne change pas , les mouvemens de ces parties entre elles ne changeront pas non plus. Car les translations réciproques des parties dépendent de leur frottement. Ainsi une partie quelconque persévérera dans le mouvement qui est nécessaire pour que le frottement qu'elle éprouve d'un côté ne la retarde pas plus que celui qu'elle éprouve de l'autre ne l'accélère.

Cor. 9. Ainsi si le vase est en repos , & que le mouvement du globe soit donné , le mouvement du fluide le fera aussi. Car concevez un plan qui passe par l'axe du globe , & qui se meuve en un sens contraire ; & supposez que la somme du temps de sa révolution & de celle du globe , soit au temps de la révolution du globe , comme le quarré du demi diamètre du vase est au quarré du demi diamètre du globe : les temps périodiques des parties du fluide seront alors , par rapport à ce plan , comme les quarrés de leurs distances au centre du globe.

Cor. 10. Donc si le vase & le globe se meuvent autour d'un même axe ou bien autour de quelque axe différent , avec une vitesse quelconque donnée , on aura le mouvement du fluide. Car si de tout le système on ôte le mouvement angulaire du vase , tous les mouvemens demeureront les mêmes entr'eux comme auparavant , par le *Cor. 8.* & ces mouvemens seront donnés par le *Cor. 9.*

Cor. 11. Si le vase & le fluide sont en repos , & que le globe tourne d'un mouvement uniforme , le mouvement se communiquera peu à peu à tout le fluide renfermé dans le vase , & le vase sera mù circulairement par ce mouvement , à moins qu'il ne soit fortement retenu , & le fluide & le vase ne cesseront point d'être accélérés jusqu'à ce que leurs temps périodiques soient égaux aux temps périodiques du globe. Si le vase est retenu par quelque force , ou bien qu'il tourne par un mouvement constant & uniforme quelconque , le milieu parviendra peu à peu à l'état de mouvement dont on a parlé dans les *Cor. 8. 9. & 10.* & il

ne restera jamais dans aucun autre état. Ensuite, si les forces qui faisoient tourner le globe & le vase avec des mouvemens déterminés cessent d'agir, & que tout le système soit abandonné aux loix de la mécanique; le globe & le vase agiront l'un sur l'autre par le moyen du fluide, & ils ne cesseront point de se communiquer mutuellement leurs mouvemens par le moyen de ce fluide, jusqu'à ce que leurs temps périodiques soient égaux entre eux, & que le système entier tourne tout ensemble comme feroit un corps solide.

S C H O L I E.

Dans tout ceci, je suppose le fluide composé d'une matiere dont la densité & la fluidité soient uniformes. Dans un tel fluide, un même globe avec le même mouvement, & dans le même temps, exciteroit des mouvemens égaux & semblables, à des distances égales, dans quelque lieu du fluide qu'il fut placé. La matiere par son mouvement circulaire fait effort pour s'éloigner de l'axe du tourbillon, & par conséquent elle presse toute la matiere qui est au-delà. Cette pression rend le frottement des parties plus fort, & leur séparation plus difficile; & elle diminue, par conséquent, la fluidité de la matiere. De plus, si les parties du fluide sont plus épaissées dans quelque endroit, la fluidité y sera moindre, à cause de la diminution du nombre des superficies qui séparent ces parties les unes des autres. Je suppose que dans les cas de cette espèce, on supplée par quelque moyen au défaut de fluidité qui vient du manque de lubricité des parties, ou de quelque retardement. Car sans cela, la matiere étant plus cohérente dans les lieux où elle est moins fluide, elle se mouvroit plus lentement, & par conséquent elle recevroit le mouvement plus difficilement, & le propageroit plus longtemps que la proportion assignée ci-dessus ne le demande. Si la forme du vase n'est pas sphérique, les particules se mouvront dans des lignes qui ne seront pas circulaires, mais conformes à la figure du vase, & les temps périodi-

ques seront comme les quarrés des moyennes distances au centre à peu près. Les mouvemens seront plus lents dans les lieux entre la circonférence & le centre où les espaces sont plus grands, & ils seront plus prompts dans les lieux où ces espaces seront plus étroits, & cependant les particules qui auront le plus de vitesse n'en tendront pas moins à la circonférence : car quoiqu'elles décrivent des arcs moins courbes, l'effort qu'elles font pour s'éloigner du centre ne sera diminué par cette moindre courbure qu'autant qu'il sera augmenté par l'augmentation de la vitesse. En allant des espaces plus étroits dans ceux qui sont plus larges, elles s'éloigneront un peu plus du centre, & en s'éloignant leur mouvement sera retardé ; ensuite, en repassant des espaces les plus larges dans les plus étroits leur mouvement sera accéléré, & ainsi chacune de ces particules fera perpétuellement retardée & accélérée tour à tour. Cela se passera ainsi dans un vase solide. Mais la forme d'un tourbillon dans un fluide infini se connoîtra par le Cor. 6. de cette Proposition.

J'ai cherché les propriétés des tourbillons dans cette Proposition, afin de connoître s'il étoit possible d'expliquer les phénomènes célestes par les tourbillons. Il est certain, par les observations, que les temps périodiques des planètes qui tournent autour de Jupiter, sont en raison sesquiplée de leurs distances au centre de cette planète ; & la même règle a lieu pour les planètes qui tournent autour du soleil. Ainsi cette règle étant observée assez exactement par toutes les planètes autant que les observations astronomiques ont pu le faire voir jusqu'à présent, elle est une loi de la nature. Or, si les planètes qui tournent autour de Jupiter & du Soleil étoient transportées par des tourbillons, ces tourbillons devroient aussi observer la même loi en tournant. Mais les temps périodiques des particules des tourbillons sont en raison doublée de leurs distances au centre du mouvement : & cette raison ne peut être diminuée & devenir la raison sesquiplée, à moins que la matière du tourbillon ne soit

d'autant plus fluide , qu'elle s'éloigne plus du centre , ou que la résistance , causée par le défaut de lubricité des parties du fluide , n'augmente , par l'augmentation de la vitesse avec laquelle les parties du fluide sont séparées les unes des autres , dans une plus grande raison que celle dans laquelle cette vitesse elle-même augmente. Or l'un & l'autre répugne à la raison. Car les parties les plus épaisses & les moins fluides iroient à la circonférence , si elles ne pésoient pas vers le centre ; & quoique j'aye supposé pour les démonstrations au commencement de cette section , que la résistance étoit proportionnelle à la vitesse , il est vraisemblable cependant qu'elle augmente dans une moindre raison que la vitesse. Ce qui étant accordé , il est certain que les temps périodiques des parties du tourbillon seront dans une plus grande raison que la raison doublée des distances au centre. Que si les tourbillons (comme c'est l'opinion de quelques-uns) se meuvent plus vite près du centre , & ensuite plus lentement jusqu'à un certain éloignement , & enfin de nouveau plus promptement près de la circonférence ; il est certain qu'ils ne pourront observer ni la raison sesquiplée des distances , ni aucune proportion déterminée. C'est donc aux Philosophes à voir comment ils pourront expliquer cette loi de la raison sesquiplée par le moyen des tourbillons.

PROPOSITION LIII. THÉORÈME XLI.

Les corps , qui sont emportés par des tourbillons & dont les orbites rentrent en elles-mêmes , sont de même densité que ces tourbillons , & se meuvent selon la même loi que leurs parties , quant à la vitesse & à la direction.

Car si quelque petite partie d'un tourbillon , dont les particules ou les points physiques conservent entr'elles une certaine position , est supposée se congeler : comme cette particule ne change , ni quant à sa densité , ni quant à la force imprimée , ni quant à la figure , elle se mouvra par la même loi qu'auparavant : & réci-

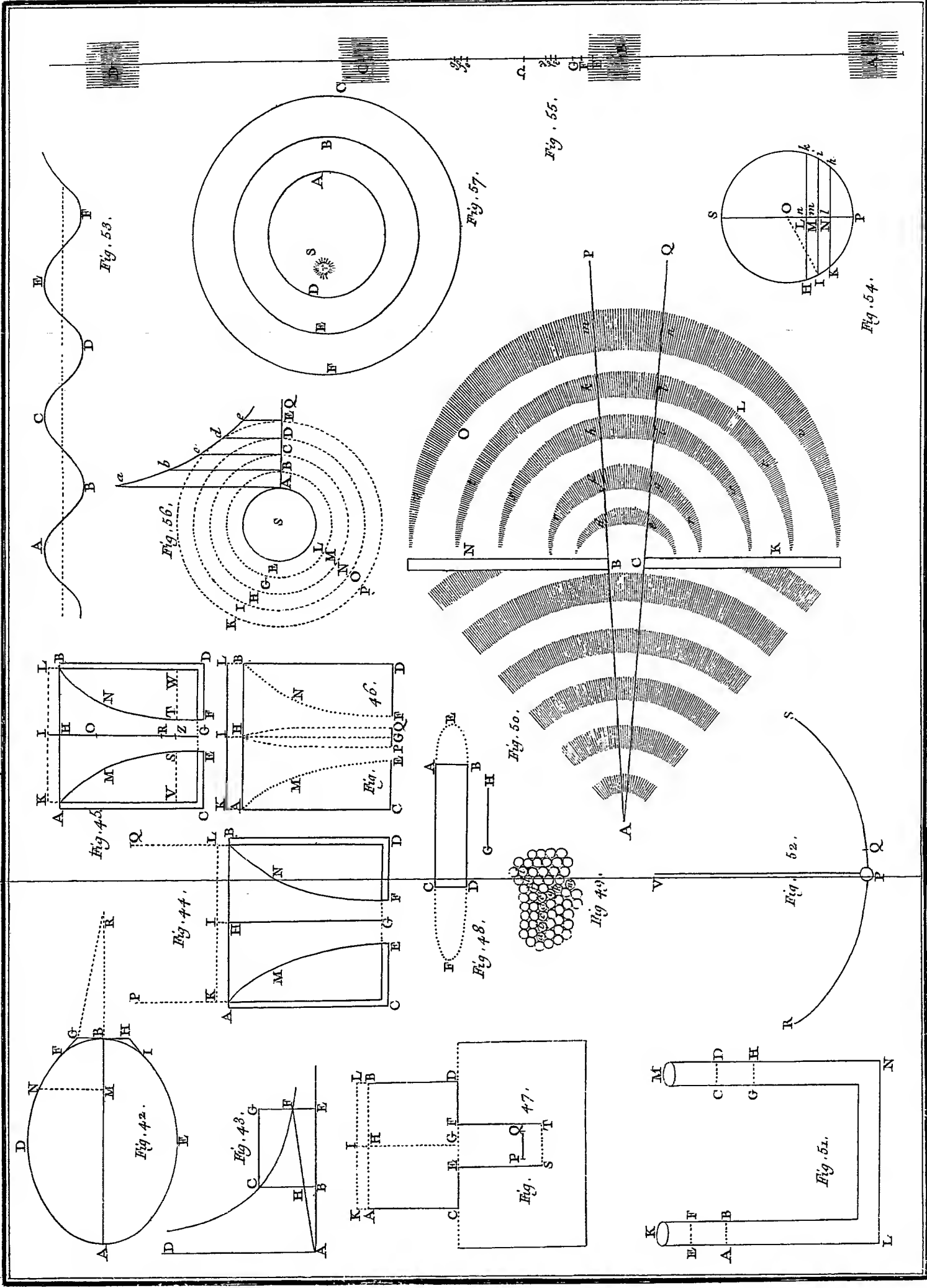
proquement, si la partie congelée & solide est de même densité que le reste du tourbillon, & qu'elle soit rendue fluide; elle se mouvra de la même manière qu'auparavant, à moins que les particules rendues fluides ne se mêlent entr'elles. Négligeant donc ce mouvement des particules entr'elles comme ne contribuant en rien au mouvement progressif du tout, le mouvement total sera le même qu'auparavant. Mais ce mouvement sera le même que le mouvement des autres parties du tourbillon également éloignées du centre, parce que cette particule solide qui est devenue fluide devient une partie du tourbillon semblable aux autres parties. Donc, si cette partie solide est de la même densité que la matière du tourbillon, elle aura le même mouvement que les parties de ce tourbillon, & sera dans un repos relatif avec la matière ambiante. Si elle est plus dense, alors elle fera plus d'effort pour s'éloigner du centre du tourbillon qu'elle n'en faisoit auparavant; ainsi, en surpassant la force du tourbillon par laquelle cette particule étoit auparavant retenue dans son orbite comme en équilibre, elle s'éloignera du centre, & décrira en tournant une spirale, & par conséquent son orbite ne reviendra plus sur elle-même. Et par le même raisonnement, si elle est moins dense, elle s'approchera du centre; & par conséquent l'orbite que décrira cette particule ne reviendra point sur elle-même, à moins qu'elle ne soit de la même densité que le fluide. Et il a été démontré que dans ce cas elle observeroit dans sa révolution la même loi que les parties du fluide également distantes du centre du tourbillon. C. Q. F. D.

Cor. 1. Donc, un solide qui est emporté par un tourbillon, & qui décrit une orbite qui rentre en elle-même, est dans un repos relatif avec le fluide dans lequel il nâge.

Cor. 2. Et si ce tourbillon est d'une densité uniforme, ce corps pourra faire sa révolution à une distance quelconque du centre du tourbillon.

Fig. 57.

Il est donc certain que les planettes ne sont point transportées par des tourbillons de matiere. Car les planettes qui tournent autour du soleil, selon l'hypothèse de Copernic, font leurs révolutions dans des ellipses qui ont le Soleil dans un de leurs foyers, & elles parcourent des aires proportionnelles au temps. Mais les parties d'un tourbillon ne peuvent se mouvoir ainsi. Que AD , BE , CF représentent trois orbes décrits autour du Soleil S , dont le plus extérieur CF soit concentrique au Soleil, & que les aphélies des deux intérieurs soient A & B , & leurs périhélie D & E . Le corps qui fait sa révolution dans l'orbe CF , en décrivant des aires proportionnelles au temps, se meut d'un mouvement uniforme. Mais le corps qui fait sa révolution dans l'orbe BE , se mouvera plus lentement dans l'aphélie B , & plus vite dans le périhélie E , selon les loix astronomiques; cependant, selon les loix de la mécanique, la matiere du tourbillon doit se mouvoir plus vite dans l'espace plus étroit entre A & C que dans l'espace plus large entre D & F ; c'est-à-dire, que le corps révolvant ira plus vite dans l'aphélie que dans le périhélie. Ce qui est contraire l'un à l'autre. Ainsi dans le commencement du signe de la Vierge, où Mars commence à être dans son aphélie, la distance entre les orbes de Mars & de Venus est à la distance de ces mêmes orbes dans le commencement du signe des Poissons comme 3 à 2 à peu près, & par conséquent, la matiere du tourbillon entre ces orbés devroit aller plus vite dans le commencement des Poissons que dans le commencement de la Vierge dans la raison de 3 à 2. Car plus l'espace par lequel une même quantité de matiere passe dans le même temps est étroit, & plus elle doit avoir de vitesse. Donc, si la terre est emportée par une matiere céleste avec laquelle elle soit dans un repos relatif, & qu'elle tourne avec cette matiere autour du Soleil, sa vitesse au commencement du signe des Poissons doit être à sa vitesse au commen-



cement du signe de la Vierge en raison sesquialtere. Donc le mouvement diurne apparent du Soleil devoit être de 70 minutes plus vite dans le commencement de la Vierge, & plus lent de 48 minutes dans le commencement des Poissons. Or, il est certain, (par les observations) que le mouvement diurne apparent du Soleil est plus vite dans le commencement des Poissons que dans le commencement de la Vierge, & que par conséquent la terre va plus vite dans le commencement de la Vierge que dans le commencement des Poissons. Ainsi l'hypothèse des tourbillons répugne à tous les phénomènes astronomiques, & paroît plus propre à les troubler qu'à les expliquer. Mais on peut comprendre par ce qui a été dit dans le premier livre comment ces mouvemens peuvent s'exécuter sans tourbillons dans des espaces libres. Et cela sera encore mieux expliqué dans le troisième livre.

FIN DU TOME PREMIER.

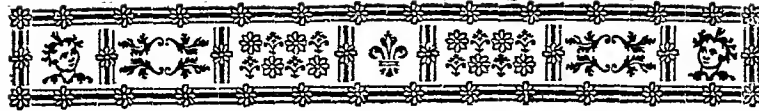


TABLE ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES

Contenues dans les Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle.

AVERTISSEMENT.

On a mis à la fin de ce premier Volume la Table générale des Matières des Principes, quoique leur troisième Livre soit contenu dans le second Volume; ainsi quand on trouvera le troisième Livre indiqué, il faudra recourir à ce second Volume. A l'égard des citations elles doivent s'entendre ainsi, III. x. 484 signifient Liv. III. Prop. X. pag. 484. Les Prop. sont marquées en chiffres romains italiques, les pages en chiffres arabes.

A. **AIR**, sa densité, à une hauteur quelconque, se conclut de la Prop. 22. du Liv. 2. on fait voir ce qu'elle est à la hauteur d'un demi diamètre de la terre. III. xij. 153

A quelle cause on peut attribuer la force élastique. II. xxij.

Comparaison de la pesanteur avec celle de l'eau. III. *ibid.*

Sa résistance: on la mesure par les expériences des pendules. II. xxxj.

Et par la théorie des corps tombans, on la détermine plus exactement. II. IV. Sch. 40

AIRES (comparaison des) que les corps qui circulent décrivent par des rayons tirés au centre, avec les temps employés à les décrire. I. ij. iij. lvij. lxx.

ANGLES de contact ne sont pas tous du même genre, mais les uns sont infiniment plus petits que les autres. I. Lem. II. Sch.

APSIDES, on examine leur mouvement. I. Sect. 9.

ATTRACTION (démonstration de l') universelle des corps. III. vij.

Certitude de cette démonstration. II. iv. 17

L'auteur n'a jamais assigné la cause de cette attraction, ni la façon dont elle s'exécute. I. 7. 167. 200. III. 179

C.

CENTRE, le commun centre de gravité de plusieurs corps ne change point son état de repos ou de mouvement par l'action de ces corps entr'eux. I. 25

Le centre commun de gravité de la terre, du Soleil & de toutes les planètes est en repos. III. xj.

C'est ce qui est confirmé par le Cor. 2. de la Prop. 14. Liv. 3.

Le centre commun de gravité de la terre & de la Lune parcourt en une année le grand orb. III. 31

A quelle distance ce commun centre est de la Lune & de la terre. III. 101

Centre des forces par lesquelles les corps qui tournent sont retenus dans leur orbite.

- Par quel indice on trouve ce centre des aires. I. *iiij.* 54
- Comment on trouve ce centre en connaissant les vitesses des corps qui tournent. I. *v.*
- CERCLES, par quelle loi d'une force centripète tendante à un point quelconque donné, un corps peut décrire en tournant la circonférence d'un cercle. I. *iv. vij. viij.*
- CHALEUR, il est reconnu que la chaleur allonge une barre de fer. III. *xliv.*
- Quelle est la chaleur du Soleil à différentes distances. III. *xlj.*
- Quelle elle est dans Mercure. III. *viiij. Cor. 4.*
- Quelle elle étoit dans la comète de 1680. lorsque cette comète étoit dans son périhélie. III. *xlj.*
- CIEUX, ils sont destitués de toute résistance sensible, III. *x. xlj.* & par conséquent ils sont vuides de tout fluide corporel. II. *xl.* Ils donnent passage à la lumière sans lui faire éprouver aucune réfraction. III. *xlj.*
- COMETES, elles sont du genre des planètes, & non de celui des météores. III. *xl. xlj.* 143
- Elles sont placées au-dessus de la Lune, & elles sont dans la région des planètes. III. *xxxix.*
- Comment on peut déterminer à peu près leurs distances par les observations. III. *Lem. IV.* 110
- On en a observé une plus grande quantité dans l'hémisphère vers le Soleil que dans l'hémisphère opposé, & pourquoi. III. 117
- Elles brillent par la lumière du Soleil qu'elles réfléchissent. *ibid.*
- Dans quelle proportion est ordinairement cette lumière. III. 113
- Elles sont entourées de grands atmosphères immenses. III. 114 & 118
- On croit que celles qui approchent le plus près du Soleil, sont pour la plupart les plus petites. III. 160
- Pourquoi elles ne sont point renfermées dans le zodiaque, (comme les planètes) mais parcourent toutes les régions du Ciel. III. 171
- Elles peuvent quelquefois tomber dans le Soleil & lui servir d'un nouvel aliment. III. 172
- On imagine quel est leur usage. III. *157 & 172*
- Elles se meuvent dans des sections coniques qui ont leur foyer dans le centre du Soleil, & elles décrivent des aires proportionnelles au temps par un rayon tiré au Soleil, & quoiqu'elles se meuvent dans des ellipses si leur orbe rentre en lui-même, cependant ces orbes approchent infiniment d'être paraboliques. III. *xl.*
- On trouve leur trajectoire parabolique par le moyen de trois observations données : III. *xlj.* & on corrige cette trajectoire trouvée. III. *xlij.*
- Comment on trouve le lieu d'une comète dans une trajectoire parabolique, pour un temps donné. III. *xlj.*
- On compare la vitesse d'une comète avec celle d'une planète. *ibid.*
- Leurs queues.
- Elles sont opposées au Soleil. III. *xlj.* 150
- Elles sont les plus grandes & les plus brillantes, immédiatement après leur passage dans le voisinage du Soleil. III. *xlj.* 149
- La matière qui les compose est extrêmement rare. III. *xlj.* 152
- Origine & nature de ces queues. III. 113
- Dans quel espace de temps elles s'élèvent de la tête des comètes. III. *xlj.* 152
- Comète des années 1664 & 1665.
- On examine son mouvement observé, & on le compare avec la théorie. III. *xlij.* 163
- Comète des années 1680 & 1681.
- Son mouvement observé. III. *xlj.*
- On le calcule pour un orbe parabolique. III. 135
- Et pour un orbe elliptique. III. 138
- On trace sa trajectoire & sa queue pour tous les lieux. III. 143
- Comète de l'année 1681.
- On compare son mouvement avec la théorie. III. 168
- On croit que cette même comète avoit déjà paru en 1607. & que par conséquent son temps périodique est de 75 ans. III. 171
- Comète de l'année 1683.
- Comparaison de son mouvement avec la théorie. III. 167
- Comète de 1723.

Comparaison de son mouvement avec la théorie. III. 169

COURBES, on les distingue en géométriques rationnelles, & géométriques irrationnelles. I. 118

Comment on peut trouver la courbure des figures. III. xxvij. 60. II. x. 273

CYCLOIDE ou EPICYCLOIDE, leur rectification. I. xlvij. xlix.

Leur évolution. I. l. 162

CYLINDRE (attraction d'un) composé de particules attirantes, & donr les forces attractives sont réciproquement comme les quarrés des distances. I. 229

D.

DEGRES, on donne la mesure des degrés du méridien terrestre, & on fait voir par la théorie combien leur différence est petite. III. xx.

DESCENTE, quelle est la descente des corps graves dans le vuide. III. 35

On compare les espaces décrits, les temps employés à les décrire, & les vitesses acquises en les décrivant dans l'ascension, & la descente rectiligne des corps, en supposant une force centripète d'un genre quelconque. I. Sect. 7.

Descention & ascension des corps dans des milieux résistans. II. iij. viij. ix. xl. xiiij. xiv.

DIEU. (nature de) III. 175, 176, &c.

E.

ELLIPSE, par quelle loi de force centripète tendante au centre de la figure cette courbe est décrite par le corps. I. x.

Par quelle loi un corps qui tourne peut décrire cette courbe avec une force centripète qui tend à un de ses foyers. I. xj.

EQUINOXES. (précession des)

On assigne les causes de ce mouvement. III. xxj.

Et on tire de ces causes la quantité de ce mouvement. III. xxxix.

ESPACE absolu & relatif. I. 8, 9, 10

Il n'est pas également plein. III. 21

ETOILES FIXES, on démontre qu'elles sont en repos. III. 31

A quelles causes on doit attribuer leur radiation & leur scintillation. III. 148, &c.

D'où peuvent venir les nouvelles étoiles. III. 172

On s'apperçoit qu'il faut admettre une

espèce de fluide très-subtil qui pénètre tous les corps, & qui demeure caché dans leur substance, afin de pouvoir expliquer plusieurs phénomènes de la nature. III. 179

F.

FLUIDE. (définition du) II. 301

On fait voir quelles loix suivent la densité & la compression des fluides. II. Sect. 5.

On détermine le mouvement des fluides qui s'écoulent par un trou fait dans un vase. II. xxxvj.

FORCES, leur composition & leur décomposition. I. 19

FORCES ATTRACTIVES (on détermine les) des corps sphériques composés de particules qui attirent selon une loi quelconque. I. Sect. 12.

Et celles des corps qui ne sont pas sphériques, & qui sont composés de particules attirantes selon une loi quelconque. *ibid.*

FORCE CENTRIFUGE (quelle est la) des corps sous l'équateur. III. 35

FORCE CENTRIPETE. (on définit la) I. 3

On définit ce qu'on entend par sa quantité absolue. I. 5

Ce qu'on entend par sa quantité accélératrice. I. 5

Et par sa quantité motrice. I. 6

On fait sçavoir comment on peut connaître la proportion à une force quelconque connue. I. 56. *Sch.*

Un corps qui circule autour d'un centre immobile dans un espace non résistant, fait découvrir les forces centripètes. I. Sect. 2. & 3.

Les forces centripètes tendantes à un point quelconque, & par lesquelles une figure quelconque peut être décrite par un corps qui circule étant données, les forces centripètes tendantes à un autre point quelconque, & par lesquelles la même figure peut être décrite dans le même temps périodique sont aussi données. I. vij. *Cor.* 3. 61

Les forces centripètes par lesquelles une figure quelconque est décrite par un corps qui circule étant données, on aura aussi les forces qu'il faut pour décrire une nouvelle figure dans laquelle les ordonnées ont une raison donnée avec celles de la première figure, & font avec l'axe un autre angle quelconque pourvu que chaque

- temps périodique demeure le même. I. *Sch.* 65
 On fait voir quelles figures peuvent être décrites par des forces centripètes décroissantes en raison doublée des distances. I. *xxij. Cor. 1. I. 170 Cor. 2.*
 La force centripète étant comme le cube de l'ordonnée, & tendante à un centre des forces très-éloigné, le corps se mouvra dans la section conique quelconque donnée. I. 51. *Sch.*
 Si elle est comme le cube de l'ordonnée, & tendante à un centre de forces très-éloigné, le corps se mouvra dans une hyperbole. 234, à la fin.
 FUMÉE, on explique en passant l'ascension de la fumée dans une cheminée. III. 155
 G.
GRAVITÉ, elle est d'un autre genre que la force magnétique. III. 21
Cor. 3. Elle est mutuelle entre la terre & ses parties. III. 32. à la fin.
 Sa cause n'est point assignée. III. 178 à la fin.
 Elle a lieu dans toutes les planètes. III. *v. Cor. 1.*
 Et elle décroît hors de leur superficie en raison doublée de la distance au centre. III. *viii.*
 Et de leur superficie vers le centre, elle décroît dans la raison simple des distances à peu près. III. *ix.*
 Elle a lieu dans tous les corps, & elle est proportionnelle dans chacun d'eux à leur quantité de matière. III. *vij.*
 C'est par la force de la gravité que la Lune est retenue dans son orbite. III. *iv.*
 H.
HYDROSTATIQUE, on donne les principes de l'hydrostatique. II. *Sett. 9.*
 HYPERBOLE, par quelle loi de force centrifuge tendante à éloigner le corps qui se meut dans cette figure du centre de la figure, cette courbe peut être décrite. I. *x. Sch.* 65
 Par quelle loi de force centrifuge, tendante à éloigner le corps du foyer de cette figure, ce corps peut la décrire dans son mouvement. I. *xij.* 69
 Par quelle loi de force centripète tendante au foyer de la figure, cette courbe peut être décrite par le corps qui se meut dans cette figure. I. *xij.*
- HYPOTHESE, cette philosophie les rejette de quelque espèce qu'elles soient. III. 179
 I.
INERTIE, définition de la force d'inertie. I. 2
JUPITER, son temps périodique. III. 9
 Sa distance au Soleil. *ibid.*
 Son diamètre apparent. III. 6
 Son diamètre véritable. III. 24
 Quantité de la force attractive. *ibid.*
 Poids des corps à sa superficie. *ibid.*
 Sa densité. *ibid.*
 Sa quantité de matière. *ibid.*
 De quelle quantité son mouvement est troublé par sa saturne. III. 30
 On trouve par le calcul la proportion de ses diamètres. III. 39
 Et on la compare avec les observations. *ibid.*
 En combien de temps il tourne sur son axe. III. 38
 L.
LIEU, on le définit & on le distingue en absolu & relatif. I. 3
 On trouve pour un temps donné les lieux des corps mûs dans des sections coniques. I. *Sett. 6.*
 LUMIÈRE, sa propagation n'est pas instantanée. I. *xcvj. Sch.*
 Elle n'est point l'effet de l'agitation d'un milieu éthéré quelconque. II. 410. *Sch.*
 Sa vitesse est différente dans différents milieux. I. *xcv.*
 On explique comment se fait une sorte de réflexion. I. *xcvj.*
 On explique la réfraction. I. *xliv.*
 Elle ne se fait pas dans le seul point de l'incidence. I. 239
 Incurvation des rayons en passant près des bords des corps, découverte par les expériences. I. 238. *Sch.*
 LUNE, on détermine par le calcul la figure du corps de la Lune. III. *xxxviii.*
 On explique ses libérations. III. *xvij.*
 Quel est son diamètre apparent, moyen, médiocre. III. 100. *Cor. 3.*
 Quel est son diamètre véritable. *Ibid. Cor. 4.*
 Poids des corps à sa surface. *Ibid. Cor. 4.*
 Sa densité. *Ibid. Cor. 3.*
 Sa quantité de matière. *Ibid. Cor. 4.*
 Combien sa distance médiocre à la terre contient de grands diamètres de la terre.

III. 101. *Cor.* 7. 10. & combien elle en contient de médiocres. III. 102. *Cor.* 8.

Quelle est la quantité de sa force pour mouvoir les eaux de la mer. III. *xxvij.*

Elle ne peut être sensible dans les expériences des pendules, ni dans aucune expérience quelconque d'hydrostatique. III. 100. *Cor.* 2.

Son temps périodique. III. 101. *Cor.* 7.

Temps de la révolution synodique. III. *xxvj.* 59

On déduit ses mouvemens & leurs inégalités de leurs causes. III. *xxij.* 46 & *suiv.*

La Lune va plus lentement dans le périhélie de la terre où son orbe est dilaté, & plus vite dans l'aphélie de la terre où son orbe est contracté. *ibid.*

Elle se meut plus lentement dans les syzygies de l'apogée avec le Soleil où son orbe est contracté. III. *xxxv.* *Sch.* Elle se meut plus lentement dans les syzygies du nœud avec le Soleil, & plus vite dans les syzygies, & elle décrit une aire dans une moindre raison que le temps dans le premier cas, & plus grande dans le second par un rayon tiré à la terre. III. *xxij.*

On calcule l'inégalité de ces arcs. III. *xxvj.* 56

Elle a un orbe plus courbe, & elle s'éloigne plus de la terre dans le premier cas, & dans le second elle s'approche plus de la terre, & elle a un orbe moins courbe. III. *xxij.* 46

On détermine par le calcul la figure de cet orbe & la proportion de ses diamètres. III. *xxvij.* 60

Et on propose ensuite une méthode de trouver la distance de la Lune à la terre par son mouvement horaire. III. *xxvij.*

Son apogée se meut plus lentement dans l'aphélie de la terre, & plus vite dans son périhélie. III. *xxxv.* 83

Son apogée avance le plus lorsque le Soleil est dans les syzygies, & il rétrograde dans les quadratures. *ibid.*

Son excentricité est la plus grande dans les syzygies de l'apogée avec le Soleil, & la moindre dans les quadratures. *ibid.*

Les nœuds se meuvent plus lentement dans l'aphélie de la terre, & plus vite dans son périhélie. *ibid.*

Les nœuds sont en repos dans leurs syzygies avec le Soleil, & rétrogradent très-vite dans les quadratures. *ibid.*

On calcule par la théorie de la gravité les mouvemens des nœuds, & l'inégalité de ces mouvemens. III. *xxx.* *xxxj.* *xxxij.* *xxxij.*

L'inclinaison de son orbe à l'écliptique est la plus grande dans les syzygies des nœuds avec le Soleil, & la plus petite dans les quadratures. I. *lxvj.* *Cor.* 10.

On calcule par la théorie de la gravité les variations de cette inclinaison. III. *xxiv.* *xxxv.*

Equations des mouvemens lunaires pour les usages astronomiques. III. 88. & *suiv.*

Mouvement moyen de la Lune.

Equation annuelle. *Ibid.* 89

Première équation semestrielle. *Ibid.* 91

Seconde équation semestrielle. 91

Première équation du centre. *Ibid.* 92

Seconde équation du centre. *Ibid.* 93

94

Première variation de la Lune. III. *xxix.*

63

Mouvement moyen de l'apogée.

Son équation annuelle. III. *xxxv.* 90

Equation semestrielle.

Son équation semestrielle. *Ibid.* 90

Mouvement moyen des nœuds. *Ibid.* 90

Leur équation annuelle. *Ibid.* 90

Leur équation semestrielle. III. *xxxij.* 79

Inclinaison de l'orbite à l'écliptique.

Son équation semestrielle. 88

Par quelle méthode on peut établir la théorie des mouvemens lunaires sur les observations. *Ibid.* 94

M.

MAGNETIQUE. (force) I. 32. II. 316. III. 22. 102

MARS, son temps périodique. III. 9

Sa distance au Soleil. *ibid.*

Mouvement de son aphélie. III. *xiv.* *Sch.*

MATIERE, on définit ce qu'on entend par sa quantité. I. 2

On définit ce qu'on entend par force résidente dans la matière, ou force d'inertie. *ibid.*

On définit ce qu'on entend par force imprimée dans la matière. 3

Comment peut-on connoître son extension, sa dureté, son impénétrabilité, sa mobilité, sa force d'inertie, sa gravité. III. 2. III. 179

La matière subtile de Descartes est réfutée. III. *xxxj.* *Sch.* 143

- MECHANIQUES, on démontre & on explique ce qu'on appelle les puissances mécaniques. I. 29, 30, 34
- MER, on déduit le flux de la mer de ses causes. III. xxiv. xxvj. xxxvij.
- MERCURE, son temps périodique. III. 9
- Sa distance au Soleil. *ibid.*
- Mouvement de son aphélie. III. xiv. *Sch.*
- METHODE des premières & dernières raisons. I. *Sett.* 1.
- Pour transformer les figures en d'autres qui soient du même genre analytique. I. *Lem.* XXII. 99
- Des fluxions. II. *Lem.* II. 250
- D'interpolation. III. *Lem.* V & VI. 120, 122
- Pour trouver les quadratures approchées de toutes les courbes. *Ibid.* 120
- Des séries convergentes appliquée à la solution des Problèmes les plus difficiles. I. 146, 147, 234
- MOUVEMENT, on définit ce qu'on entend par la quantité, I. 2, absolu & relatif. 9 & *suiv.* On démontre par des exemples comment on peut distinguer ces deux sortes de mouvemens l'un de l'autre. 13
- Loix du mouvement. 17 & *suiv.*
- Composition & résolution des mouvemens. 19
- On fait voir par quelle expérience on peut connoître exactement après la réflexion les mouvemens des corps qui se choquent. 27 & *suiv.*
- Mouvement des corps.
- Dans les sections coniques excentriques. I. *Sett.* 1.
- Dans des orbes mobiles. I. *Sett.* 9.
- Dans des superficies données, & du mouvement réciproque des pendules. I. *Sett.* 10.
- Du mouvement des corps qui s'attirent réciproquement. I. *Sett.* 11.
- Des mouvemens des corps très-petits qui sont agités par des forces centripètes, qui rendent à chacune des parties de quelque corps d'une masse beaucoup plus grande. I. *Sett.* 14.
- Des mouvemens des corps qui éprouvent des résistances en raison de la vitesse. II. *Sett.* 1.
- En raison doublée de la vitesse. II. *Sett.* 2.
- Partie en raison de la vitesse, & partie dans la raison doublée. II. *Sett.* 3.
- Des corps qui se meuvent dans des milieux par la seule force résidente en eux. II. j. ij. v. vj. vij. xxxv.
- Des corps qui montent ou descendent en ligne droite dans des milieux résistans, par la force uniforme de la gravité. II. ij. viij. ix. xl.
- Des corps projetés dans des milieux résistans. II. iv. x. xj.
- Des corps qui circulent dans des milieux résistans. II. *Sett.* 4.
- Des pendules qui oscillent dans des milieux résistans. II. *Sett.* 6.
- Mouvement & résistance des fluides. II. *Sett.* 7.
- Mouvement propagé dans des fluides. II. *Sett.* 8.
- Mouvement circulaire ou de tourbillons des fluides. II. *Sett.* 9.
- Le monde n'a point été formé par des causes mécaniques. III. *Sch. gen.* 174
- N.
- NAVIRE, proposition qui peut être de quelque utilité pour leur construction. II. xxxiv. *Sch.*
- O.
- OMBRE, l'ombre de la terre doit être augmentée dans des éclipses de Lune à cause de la réfraction de l'atmosphère. III. 94 vers la fin.
- ONDES, on trouve la vitesse des ondes propagées dans la superficie d'une eau stagnante. II. xlvj.
- OPTIQUE, détermination des verres elliptiques que Descartes avoit cachée. I. xcviij.
- Solution plus générale du Problème de Descartes. I. xcviij.
- ORBITES, détermination des orbites que les corps décrivent en partant d'un lieu donné avec une vitesse donnée & selon une ligne droite donnée, lorsque la force centripète est réciproquement comme le carré de la distance, & qu'on connoît la quantité absolue de cette force. I. xviij.
- Que les corps décrivent lorsque les forces centripètes sont réciproquement comme les cubes des distances. I. ix. xlvj. *Cor.* 3. xlvj. *Cor.* 5.
- Quelles sont celles que les corps sollicités par des forces centripètes quelconques décrivent. I. *Sett.* 8.

P.

PARABOLE, par quelle loi de force centripète tendante à son foyer cette figure est décrite par le corps qui s'y meut. I. *xiiij.*

PENDULES, on explique les propriétés des pendules. I. *l. ij. liij. liij.* II. *Scd. 6.*

On compare entr'elles, tant par la théorie de la gravité, que par les observations, les diverses longueurs des pendules isochrones dans les différentes latitudes des lieux. III. *xx.*

PHILOSOPHIE, règles à observer en philosophant. III. *2*

PLANETES, elles ne sont point transportées par des tourbillons corporels. II. *424-426.* III. *174*

PLANETES PRINCIPALES, environneur le Soleil III. *8*

Elles se meuvent dans des ellipses ayant le centre du Soleil dans un de leur foyer. III. *xiiij.*

Elles décrivent des aires proportionnelles au tems par un rayon tiré au Soleil. III. *xiiij.*

Elles font leurs révolutions dans des tems périodiques qui sont en raison sesquiplée de leurs distances au Soleil. III. *vij. xiiij. & I. xv.*

Elles sont retenues dans leurs orbites par la force de gravité qui tend au Soleil, & laquelle est réciproquement comme le carré de la distance à son centre. III. *ij. v.*

PLANETES SECONDAIRES, elles se meuvent dans des ellipses qui ont le centre de leur planète principale pour un de leurs foyers; elles décrivent des aires proportionnelles au tems par un rayon tiré à leur planète principale. III. *5 & suiv. III. xxij.*

Elles font leurs révolutions dans des tems périodiques qui sont en raison sesquiplée de leurs distances à leurs planetes principales. *Ibid. & I.* *15*

Elles sont retenues dans leurs orbites par la force de la gravité qui tend à leur planète principale, & est réciproquement comme le carré de la distance à leur centre. III. *j. iiij. iv. v.*

PLANETES, leurs tems périodiques. III. *5, 9*

Leurs distances au Soleil. *Ibid.*

Les aphélie & les nœuds de leurs orbites sont presque en repos. III. *xiv.*

On détermine leurs orbes. III. *j. v. vj.*

On trouve leurs lieux dans ces orbes. I. *xxxj.*

Leur densité est proportionnelle à la chaleur qu'elles reçoivent du Soleil. III. *vij. Cor. 4.*

Leurs rotations diurnes sont uniformes. III. *xvij.*

Leurs axes sont plus courts que les diamètres de leur équateur. III. *vij.*

POIDS DES CORPS sur la terre, sur le Soleil, ou sur une planète quelconque, sont à égales distances de leurs centres comme les quantités de matière de ces corps. III. *vj.*

Ils ne dépendent point de leurs formes ni de leur texture. III. *vj. Cor. I.*

On les trouve pour les différentes régions de la terre, & on les compare entr'eux. III. *xx.*

PROBLEMES (solution de) de Kepler par la trochoïde & par approximation. I. *xxxj.*

Construction géométrique & solution synthétique du Problème des quatre lignes des anciens, rapporté par Pappus, & que Descartes a résolu par le calcul algébrique. I. *90, 91*

PROJECTILES, ils se meuvent dans une parabole si on fait abstraction de la résistance du milieu. I. *27, 28, x. Sch. ciij. Sch. II. x. exemp. seconde.* *2*

Quel est leur mouvement dans les milieux résistans. II. *iv. x.*

PULSIONS, on détermine les largeurs ou intervalles des pulsions de l'air par lesquelles elles sont propagées. II. *l. Sch. vers la fin.*

Q.

QUADRATURE (on ne peut avoir la) d'aucune ovale en termes finis. I. *Lem. XXVIII.*

QUALITÉS (des corps), comment on peut les connoître, & quand il faut les admettre. III. *3*

R.

RAISON (définition de la) sesquiplée. I. *45*

REPOS, du repos vrai, & du repos relatif. I. *9 & suiv.*

RESISTENCE (quantité de la) dans les milieux qui ne sont pas continus. II. *xxxv.*

- Dans les milieux continus. II. *xxxviiij.*
 Dans des milieux d'un genre quelconque. II. *xxxv. Sch.*
 La théorie des résistances est confirmée par les expériences des pendules. II. *xxx. xxxj. & Sch. suiv.*
 Par les expériences des corps qui tombent. II. *xl. & Sch. suiv.*
 La résistance des milieux est comme leur densité, toutes choses égales. II. 340
 & *suiv.* II. *xxxiiij. xxxv. xxxviij.* II. 391
 En raison doublée du diamètre des corps sphériques auxquels ils résistent, toutes choses égales. II. 346 & *suiv.* II. *xxxiiij. xxxv. xxxviij. fig. de la pag.* 379
 La résistance des fluides est de trois sortes, car elle vient ou de l'inertie de la matière fluide, ou de la ténacité de ses parties, ou du frottement. II. *xiv. Sch.*
 La résistance des fluides est presque toute du premier genre. II. 390
 Et elle ne peut être diminué par la subtilité des parties du fluide, sa densité restant la même. II. 392
 Proportion de la résistance d'un globe à celle d'un cylindre dans des milieux non continus. II. *xxxiv.*
 Et dans les milieux comprimés. III. 374
Lem. VII.
 Résistance d'un globe dans les milieux qui ne sont pas continus. II. *xxxv.*
 Et dans les milieux comprimés. II. *xxxviij.*
 Comment on peut la trouver par l'expérience. II. *xl.*
 Comment on peut diminuer la résistance qu'un cône tronqué éprouve dans un fluide. II. *xxxiv. Sch.*
 Quel est le solide de la moindre résistance. *ibid.*
 S.
SATELLITE, plus grande elongation héliocentrique au centre de Jupiter de son dernier satellite. III. *viiij.*
 Plus grande elongation héliocentrique du satellite d'Hugheens au centre de Saturne. *ibid.*
 Temps périodiques des satellites de Jupiter, & leurs distances au centre de cette planète. III. 5
 Temps périodiques des satellites de Saturne, & leurs distances au centre de Saturne. III. 7
 On fait voir comment on peut déduire les inégalités des mouvemens des satellites de Jupiter & de Saturne, de celles des mouvemens de la Lune. III. *xxiiij.*
 SATURNE, son temps périodique. III. 9
 Sa distance au Soleil. *ibid.*
 Son diamètre apparent. *ibid.*
 Son diamètre au vrai. III. *viiij.*
 Quelle est la quantité de sa force attractive. *ibid.*
 Poids des corps à sa surface. *ibid.*
 Sa densité. *ibid.*
 Quantité de sa matière. *ibid.*
 Quelle est l'altération que Jupiter cause dans son mouvement. III. *xiiij.*
 Diamètre apparent de l'anneau qui l'entoure. III. 8
 SECTIONS CONIQUES; par quelle loi de force centripète tendant à un point quelconque donné, ces figures sont décrites par les corps qui s'y meuvent. I. *xviij. Sch.*
 Description géométrique de ces courbes lorsque les foyers sont donnés. I. *Sett. 4.*
 Lorsque les foyers ne sont pas donnés. I. *Sett. 5.*
 Lorsque les centres ou les asymptotes sont donnés. I. *xxxvij. Sch.*
 SOLEIL, il se meut autour du centre commun de gravité de toutes les planètes. III. *xij.*
 Son temps périodique autour de son axe. III. *xviij.*
 Son diamètre moyen apparent. III. *xxxvj. Cor. 3.*
 Son diamètre vrai. III. *viiij.*
 Sa paralaxe horizontale. *ibid.*
 Il y a une paralaxe mensuelle. III. *xxiiij. à la fin.*
 Quelle est la quantité de sa force attractive. III. *viiij.*
 Poids des corps à sa surface. *ibid.*
 Sa densité. *ibid.*
 Sa quantité de matière. *ibid.*
 Quelle est sa force pour troubler les mouvemens de la Lune. III. *iiij. xxxv.*
 Quelle est sa force pour élever les eaux de la mer. III. *xxxvj.*
 SONS. (on explique la nature des) II. *xlviij. xlvij. jusqu'à l.*
 Ils se détournent de la ligne droite en se propageant. III. *xlviij.*
 Cette propagation se fait par l'agitation de l'air. III. *l. Sch.*

On

TABLE ALPHABETIQUE DES MATIERES.

437

On trouve par le calcul quelle est leur vitesse. *Ibid.*

Elle doit être, selon la théorie, un peu plus grande l'été que l'hiver. *Ibid. vers le milieu.*

Le son cesse aussi-tôt que le mouvement du corps sonore vient à cesser. *Ibid. vers la fin.*

On l'augmente par le moyen des port-voix. *Ibid.*

SPHEROÏDE (attraction d'un) dont les particules ont des forces qui sont réciproquement comme les quarrés des distances. I. *xxj. Cor. 2.*

SPIRALE, on fait voir par quelle loi de force centripète tendante au centre, une spirale qui coupe tous les rayons sous un angle donné peut être décrite par un corps qui tourne. I. *ix. xj. xv. xvj.*

SUBSTANCES (les) de toutes les choses sont cachées. III. *Sch. 9. à la fin.*

T.

TEMPS absolu & relatif. I. 8

On trouve l'équation astronomique du temps par les horloges à pendules, & par les éclipses des satellites de Jupiter. I. 10

Quels sont les temps périodiques des corps qui tournent dans les ellipses lorsque les forces centripètes tendent au foyer. I. *xv.*

TERRE (mesure de la) par Norwood. III. *xix.* par Picart. *Ibid.*

On détermine la figure, la proportion de ses diamètres & de la mesure des degrés

de Méridien. III. *xix. xx.*

Excès de la hauteur à l'équateur sur la hauteur aux Poles. III. *xix. vers le mil. xx. à la fin.*

Son plus grand & son plus petit diamètre. III. *xix. vers le mil.* son diamètre moyen. *Ibid. &c.*

Le Globe de la terre est plus dense que s'il étoit entièrement composé d'eau. III. *x.*

Nutation de son axe. III. *xxj.*

On démontre le mouvement annuel dans le grand orbe. III. *xij. xij. III. 152*

Quelle est la quantité de son excentricité III. *xxxv. Sch.*

Quelle est la quantité du mouvement de son aphélie. III. *xiv. Sch. 10*

TOURBILLON. On examine leur nature & la manière dont on les emploie. II. *Sec. 9. III. Sch. génér. de la fin. p. 173*

V.

VIDE (il y a du), ou bien (si on veut que tous les espaces soient pleins) ils ne le sont pas également. II. *xl. Sch. à la fin. III. 6. Cor. 4.*

VITESSE (plus grande) qu'un globe puisse acquérir en tombant dans un milieu résistant. II. *xxxviii. Cor. 2.*

Quelles sont les vitesses des corps mus dans des sections coniques, lorsque les forces centripètes tendent au foyer. I. *xvj.*

VENUS: Son tems périodique. III. 9

Sa distance au Soleil. *Ibid.*

Mouvement de son aphélie. III. *xix. Sch.*



ACHEVÉ D'IMPRIMER
EN FÉVRIER 1990
PAR L'IMPRIMERIE
DE LA MANUTENTION
A MAYENNE

N° 8-90

Dépôt légal : Février 1990



**ÉDITIONS
JACQUES GABAY**
RÉIMPRESSIONS

Niels Henrik ABEL

- *Œuvres complètes (2 tomes)*

Jean D'ALEMBERT

- *Traité de dynamique*

André-Marie AMPÈRE

- *Théorie mathématique des phénomènes électro-dynamiques*

Paul APPELL

- *Traité de Mécanique rationnelle (5 tomes)*

Paul BARBARIN

- *La Géométrie non euclidienne*

Ludwig BOLTZMANN

- *Leçons sur la théorie des gaz*

Emile BOREL

- *Leçons sur les séries divergentes*

Léon BRILLOUIN

- *Les tenseurs en mécanique et en élasticité*
- *La science et la théorie de l'information*

Louis de BROGLIE

- *Ondes et mouvements*

Georg CANTOR

- *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*

Sadi CARNOT

- *Réflexions sur la puissance motrice du feu*

Elie CARTAN

- *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*

Augustin-Louis CAUCHY

- *Analyse algébrique*

Michel CHASLES

- *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*
- *La dualité et l'homographie*

R. DELTHEIL & D. CAIRE

- *Géométrie et Compléments de géométrie*

Pierre FERMAT

- *Précis des Œuvres mathématiques et de l'Arithmétique de Diophante*

Joseph FOURIER

- *Théorie analytique de la chaleur*

Maurice FRÉCHET

- *Les espaces abstraits*

Évariste GALOIS

- *Œuvres mathématiques*

Carl Friedrich GAUSS

- *Recherches arithmétiques*

Jacques HADAMARD

- *Leçons de géométrie élémentaire (2 tomes)*

Hermann von HELMHOLTZ

- *Optique physiologique (2 tomes)*
- *Théorie physiologique de la musique*

Camille JORDAN

- *Traité des substitutions et des équations algébriques*
- *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique (3 tomes)*

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

- *Sélection de grands textes*

Stephen C. KLEENE

- *Logique mathématique*

Joseph-Louis LAGRANGE

- *Mécanique analytique*

Trajan LALESCO

- *La géométrie du triangle*

Henri LEBESGUE

- *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*
- *Les coniques*
- *Leçons sur les constructions géométriques*

Alexandre LIAPOUNOFF

- *Problème général de la stabilité du mouvement*

André LICHNEROWICZ

- *Éléments de calcul tensoriel*

Ernst LINDELÖF

- *Le calcul des résidus et ses applications à la théorie des fonctions*

Ernst MACH

- *La Mécanique*

James Clerk MAXWELL

- *Traité d'Électricité et de Magnétisme (2 tomes)*

Gaspard MONGE

- *Géométrie descriptive*

John von NEUMANN

- *Les fondements mathématiques de la Mécanique quantique*

Isaac NEWTON

- *Principes mathématiques de la philosophie naturelle (2 tomes)*

Julius PETERSEN

- *Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de géométrie*

Emile PICARD

- *Traité d'Analyse (3 tomes)*

Henri POINCARÉ

- *Calcul des probabilités*
- *La Mécanique nouvelle (Théorie de la Relativité)*
- *Théorie du potentiel newtonien*
- *Théorie des tourbillons*
- *Théorie mathématique de la lumière (2 tomes)*
- *Figures d'équilibre d'une masse fluide*
- *Électricité et Optique*

George POLYA

- *Comment poser et résoudre un problème*

Erwin SCHRÖDINGER

- *Mémoires sur la Mécanique ondulatoire*

Paul TANNERY

- *Pour l'histoire de la science hellène*
- *La géométrie grecque*

François TISSERAND

- *Traité de Mécanique céleste (4 tomes)*
- *Leçons sur la détermination des orbites*

Georges VALIRON

- *Équations fonctionnelles - Applications*

Vito VOLTERRA

- *Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*

Diffusion-Distribution : JACQUES GABAY

151 bis, rue Saint-Jacques 75005 PARIS

Téléphone : (1) 43 54 64 64 - Téléc : 203 521

Fax : (1) 43 54 87 00